Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Камчатский государственный университет имени Витуса Беринга»

Рассмотрено и утверждено на заседании
кафедры математики и физики
«14» мая 2019г., протокол №9
зав. кафедрой ________ А.П. Горюшкин

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ
Б1.В.ДВ.14.01 Векторный анализ и элементы теории поля

Направление подготовки: 44.03.05 «Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)

Профиль подготовки: «Начальное образование» и «Математика»

Квалификация выпускника: Бакалавр

Форма обучения: очная

Курс 5 **Семестр** 9

Зачет с оценкой 9 семестр

Год начала подготовки (по учебному плану) 2018

Петропавловск-Камчатский 2019

Рабочая программа составлена с учетом требований федерального государственного образовательного стандарта высшего образования по направлению подготовки (специальности) 44.03.05 Направление подготовки "Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)", утвержденного 09 февраля 2016 года № 91.

Разработчик(и):
ст.преподаватель кафедры математики и физики
(должность, кафедра)

_______________________ О.К. Жданова
(подпись)

(подпись)

СОДЕРЖАНИЕ

1. Цель и задачи освоения дисциплины

Целью освоения дисциплины обеспечение высокого уровня профессиональных знаний и умений, необходимых для грамотного и творческого решения вопросов обучения. Учащийся должен отчетливо усвоить фундаментальные идеи, значение важнейших аналитических результатов и овладеть техникой и методикой доказательств математических фактов.

Задачи освоения дисциплины:

- формирование системы знаний и умений, связанных с содержанием курса векторного анализа;
- актуализация межпредметных связей, способствующих пониманию особенностей математического образования;
- развитие математической культуры будущего преподавателя математики;
- приобретение опыта применения базовых математических знаний и основ векторного анализа и теории поля;
- стимулирование самостоятельной работы студентов по освоению содержания дисциплины и формированию необходимых компетенций.

2. Место дисциплины в структуре ОП ВО

Данная дисциплина относится к блоку Б1 дисциплины базовой части для академического бакалавриата. Цикл математических и естественнонаучных дисциплин (базовая часть). Изучение векторного анализа существенно опирается на понятия и факты геометрии, алгебры, математического и комплексного анализа. Дисциплина изучается в 9 семестре и обобщает те знания по математике, которые были получены в 1-4 семестрах.

3. Планируемые результаты обучения по дисциплине

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих компетенций в соответствии с ФГОС ВО (ФГОС СПО) по данному направлению подготовки (специальности):

Код компетенции	Компетенция	Универсальные дескрипторы сформированности компетенции
ОК-3	Способность использовать естественнонаучные и математические знания для ориентирования в современном информационном	Знать: основные характеристики и этапы развития естественнонаучной картины мира; место и роль человека в природе; основные способы математической обработки данных; основы современных технологий сбора, обработки и представления информации; способы применения естественнонаучных и математических знаний в общественной и профессиональной деятельности; современные информационные и коммуникационные технологии; понятие «информационная система», классификацию информационных систем и ресурсов. Уметь: ориентироваться в системе математических и

	пространстве	естественнонаучных знаний как целостных представлений для формирования научного мировоззрения; применять понятийно-категориальный аппарат, основные законы естественнонаучных и математических наук в социальной и профессиональной деятельности; использовать в своей профессиональной деятельности знания о естественнонаучной картине мира; применять методы математической обработки информации; оценивать программное обеспечение и перспективы его использования с учётом решаемых профессиональных задач; управлять информационными потоками и базами данных для решения общественных и профессиональных задач. Владеть: навыками использования естественнонаучных и математических знаний в контексте общественной и профессиональной деятельности; навыками математической обработки информации.
ОК-6	Способность к самоорганизации и самообразованию	Знать: социально-личностные и психологические основы самоорганизации; основные функциональные компоненты процесса самоорганизации (целеполагание, анализ ситуации, планирование, самоконтроль и коррекция); основные мотивы и этапы самообразования; типы профессиональной мобильности (вертикальная и горизонтальная); структуру профессиональной мобильности (внутренняя потребность в профессиональной мобильности, способность и знаниевая основа профессиональной мобильности, самоосознание личностью своей профессиональной мобильности, сформированное на основе рефлексии готовности к профессиональной мобильности); условия организации профессиональной мобильности; различные виды проектов, их суть и назначение; общую структуру концепции проекта, понимает ее составляющие и принципы их формулирования; о концепциях (концептуальных моделях) проектов в будущей профессиональной деятельности; о правовых и экономических основах разработки и реализации проектов в будущей профессиональной деятельности; системы и стандарты качества, используемые в будущей профессиональной деятельности; принципы, критерии и правила построения суждений, оценок. Уметь: в рамках поставленной цели сформулировать взаимосвязанные задачи, обеспечивающие ее достижение, а также результаты их выполнения; выбирать оптимальный способ решения задачи, учитывая предоставленные в проекте ресурсы и планируемые сроки реализации данной задачи; представлять в виде алгоритма (по шагам и видам работ) выбранный способ решения задачи; определять время, необходимое на выполнение действий (работ), предусмотренных в алгоритме; документально оформлять

		результаты проектирования; реализовывать спроектированный алгоритм решения задачи (т. е. получить продукт) за установленное время; оценивать качество полученного результата; грамотно, логично, аргументировано формировать собственные суждения и оценки; оставлять доклад по представлению полученного результата решения конкретной задачи, учитывая установленный регламент выступлений; видеть суть вопроса, поступившего в ходе обсуждения, и грамотно, логично, аргументировано ответить на него; видеть суть критических суждений относительно представляемой работы и предложить возможное направление ее совершенствования в соответствии с поступившими рекомендациями и замечаниями. Владеть: способностью формулировать в рамках поставленной цели проекта совокупность взаимосвязанных задач, обеспечивающих ее достижение, определять ожидаемые результаты решения выделенных задач; навыками решения конкретных задач проекта заявленного качества за установленное время; навыками публичного представления результатов решения конкретной задачи проекта; навыками самообразования, планирования собственной деятельности, оценки результативности и эффективности собственной деятельности; навыками организации социально-профессиональной мобильности.
ПК-4	Способность использовать возможности образовательной среды для достижения личностных, метапредметных и предметных результатов обучения и обеспечения качества учебно-воспитательного процесса средствами преподаваемых учебных предметов	**Знать:** специфику начального общего, основного общего, среднего общего образования и особенности организации образовательного пространства в условиях образовательной организации; основные психолого-педагогические подходы к проектированию и организации образовательного пространства (культурно-исторический, деятельностный, личностный) для достижения личностных, метапредметных и предметных результатов обучения и обеспечения качества учебно-воспитательного процесса средствами преподаваемого учебного предмета; основные характеристики и способы формирования безопасной развивающей образовательной среды; современные педагогические технологии реализации компетентностного подхода с учетом возрастных и индивидуальных особенностей обучающихся; методы и технологии поликультурного, дифференцированного и развивающего обучения. **Уметь:** применять современные образовательные технологии, включая информационные, а также цифровые образовательные ресурсы для достижения личностных, метапредметных и предметных результатов обучения; разрабатывать и реализовывать проблемное обучение, осуществлять связь обучения по предмету (курсу, программе) с практикой, обсуждать с обучающимися актуальные события

		современности; поддерживать в детском коллективе деловую, дружелюбную атмосферу для обеспечения безопасной развивающей образовательной среды; формировать и реализовывать программы развития универсальных учебных действий, образцов и ценностей социального поведения. **Владеть:** навыками планирования и организации учебно-воспитательного процесса, ориентированного на достижение личностных, метапредметных и предметных результатов обучения; навыками регулирования поведения обучающихся для обеспечения безопасной развивающей образовательной среды.

4. Содержание дисциплины

Векторная функция одного скалярного аргумента.

Линия как векторная функция одного скалярного аргумента. Предел, непрерывность, дифференцируемость и интегрируемость векторная функция одного скалярного аргумента. Касательный вектор, длина дуги, естественная параметризация. Репер Френе, нормальные уравнения кривой.

Скалярное поле.

Понятие скалярного поля. Поверхности уровня. Операции со скалярными полями. Плоское поле. Цилиндрическое поле. Сферическое поле. Непрерывные поля.

Понятие производной по направлению. Градиент скалярного поля. Свойства градиента и производной по направлению. Геометрическая интерпретация градиента.

Вектоная функция двух скалярных аргументов.

Поверхность как векторная функция двух скалярных аргументов. Предел, непрерывность, дифференцируемость и интегрируемость векторной функции двух скалярных аргументов. Касательная плоскость и нормаль к поверхности. I и II квадратичные формы поверхности. Кривизна поверхности.

Векторное поле.

Понятие векторного поля. Векторные линии и векторные трубки. Операции с векторными полями, непрерывность. Дифференцирование и интегрирование полей (интегралы первого и второго родя). Интеграл по длине дуги. Определение дивергенции и ее свойства. Теорема Остроградского-Гаусса. Определение ротора и его свойства. Интегральное определение ротора. Теорема Стокса. Поток векторного поля. Понятие потенциального и соленоидального поля

5. Тематическое планирование

Модули дисциплины

№	Наименование модуля	Лекции	Практики/ семинары	Лабораторные	Сам. работа	Всего, часов
1	**Теория поля**	**18**	**26**	**0**	**100**	**144**
	Всего	**18**	**26**	**0**	**100**	**144**

Модуль 1

№ темы	Тема	Кол-во часов	Компетенции по теме
	Лекции		
1	Векторная функция скалярного аргумента. Непрерывность. Предел.	2	ОК-3; ОК-6; ПК-4
2	Производная векторной функции скалярного аргумента.	2	ОК-3; ОК-6; ПК-4
3	Интегрирование векторной функции скалярного аргумента.	2	ОК-3; ОК-6; ПК-4
4	Скалярные поля	2	ОК-3; ОК-6; ПК-4
5	Векторные поля. Векторные линии.	2	ОК-3; ОК-6; ПК-4
6	Поток вектороного поля.	2	ОК-3; ОК-6; ПК-4
7	Дивергенция.	2	ОК-3; ОК-6; ПК-4
8	Циркуляция векторного поля.	2	ОК-3; ОК-6; ПК-4
9	Операторы Гамильтона и Лапласа	2	ОК-3; ОК-6; ПК-4
	Практические занятия (семинары)		
1	Предел векторной функции скалярного аргумента.	2	ОК-3; ОК-6; ПК-4
2	Производная векторной функции скалярного аргумента.	2	ОК-3; ОК-6; ПК-4
3	Интегрирование векторной функции скалярного аргумента.	2	ОК-3; ОК-6; ПК-4
4	Скалярные поля. Поверхности уровня.	2	ОК-3; ОК-6; ПК-4
5	Производная по направлению.	2	ОК-3; ОК-6; ПК-4
6	Градиент.	2	ОК-3; ОК-6; ПК-4
7	Линейный интеграл.	2	ОК-3; ОК-6; ПК-4
8	Поверхностный интеграл.	2	ОК-3; ОК-6; ПК-4
9	Поток векторного поля через поверхность.	2	ОК-3; ОК-6; ПК-4
10	Дивергенция.	2	ОК-3; ОК-6; ПК-4
11	Циркуляция векторного поля по замкнутому контуру.	2	ОК-3; ОК-6; ПК-4
12	Ротор.	2	ОК-3; ОК-6; ПК-4
13	Дифференциальные операторы	2	ОК-3; ОК-6; ПК-4
	Самостоятельная работа		

1	Векторная функция скалярного аргумента	10	ОК-3; ОК-6; ПК-4
2	Производная векторной функции скалярного аргумента	10	ОК-3; ОК-6; ПК-4
3	Интегрирование векторной функции скалярного аргумента	10	ОК-3; ОК-6; ПК-4
4	Скалярные поля	10	ОК-3; ОК-6; ПК-4
5	Векторные поля	10	ОК-3; ОК-6; ПК-4
6	Поток вектороного поля	10	ОК-3; ОК-6; ПК-4
7	Дивергенция	10	ОК-3; ОК-6; ПК-4
8	Циркуляция векторного поля	10	ОК-3; ОК-6; ПК-4
9	Операторы Гамильтона и Лапласа	10	ОК-3; ОК-6; ПК-4
10	Подготовка к экзамену	10	ОК-3; ОК-6; ПК-4

6. Самостоятельная работа

6.1. Планы семинарских (практических, лабораторных) занятий

Приводится содержание аудиторных занятий и заданий для самостоятельной работы по указанным разделам на основе следующих сборников задач:

Тема 1: Предел векторной функции скалярного аргумента.

Скалярное поле называется *плоским*, если существует некоторая плоскость, такая, что во всех плоскостях, параллельных указанной, скалярное поле будет одним и тем же.

Если эту плоскость принять за плоскость xOy, то скалярное поле определится скалярной функцией

$$u = f(x, y),$$

т. е. не будет зависеть от z.

Примером плоского скалярного поля может служить поле температур бесконечной равномерно нагретой нити.

Геометрической характеристикой плоских скалярных полей служат *линии уровня* – геометрические места точек, в которых скалярная функция имеет одно и то же значение.

Пример.

Задание: построить линии уровня следующего плоского скалярного поля $u = \sin^2 x - 3\cos xy$.

Решение: для того, чтобы построить график искомых поверхностей уровня, необходимо подключиться к библиотеке plots программы Maple с помощью команды «*with(plots):*».

Следующий шаг по осуществлению заданной цели – задание функции, определяющей поверхности уровня:

*u:=sin(x)^2-3*cos(x*y);*

Теперь можно строить сами поверхности. Для этого используется команда implicitplot(u,x=a..b,y=c..d,options). Т. к. по определению линий уровня функция в точках этих линий принимает одно и тоже значение, то примем функцию, равную, например, - 1/2, 0, ½. Интервал значений переменных примем [-10;10]:

G1:=implicitplot(u=0,x=-10..10,y=-10..10,color=black):

G2:=implicitplot(u=1/2,x=-10..10,y=-10..10,color=black):

G3:=implicitplot(u=-1/2,x=-10..10,y=-10..10,color=black):

Чтобы изобразить все пять линий уровня на одной координатной плоскости, воспользуемся функцией Maple: *display(G1,G2,G3);*

В результате работы данной программы получится график линий уровня заданного скалярного поля, представляющий собой семейство гипербол (рис. 1).

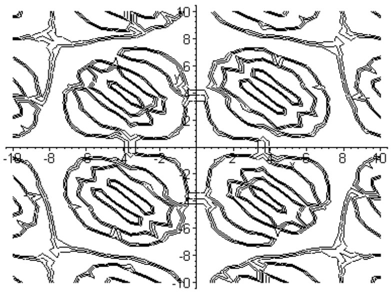


Рис. 1. Линии уровня плоского скалярного поля $u = \sin^2 x - 3\cos xy$.

Задания для самостоятельного решения.

<u>Задание</u>: для следующих плоских скалярных полей построить линии уровня.

Вариант №1. $u = 2x - y$.

Вариант №2. $u = \ln\sqrt{\dfrac{y}{2x}}$.

Вариант №3. $u = \dfrac{y^2}{x}$.

Вариант №4. $u = e^{x^2 - y^2}$.

Вариант №5. $u = r_1 + r_2$, где r_1, r_2 – расстояния от точки P (x,y) до точек F_1 и F_2 плоскости.

Вариант №6. $u = x - y$.

Вариант №7. $u = x$.

Вариант №8. $u = x^2 + y^2$.

Вариант №9. $u = 2x^2 + y$.

Вариант №10. $u = 2x - 1$.

Контрольные вопросы.

1.Какое поле называется скалярным?

2.Какое поле называется плоским?

3.Что является геометрической характеристикой плоского поля?

4.Какая библиотека Maple отвечает за построение графиков?

5.Как задается функция в Maple?

6.Что выполняет команда implicitplot?

Тема 2: Производная векторной функции скалярного аргумента.

В пространстве или некоторой его части задано *векторное поле* $\vec{F}(M)$, если каждой точке этого пространства поставлен в соответствие некоторый вектор.

Если в пространстве введена декартова система координат, то задание векторного поля $\vec{a} = \vec{a}(M)$ равносильна заданию трех скалярных функций точки P(M), Q(M), R(M) , так что

$$\vec{a}(M) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k} .$$

В векторном поле некоторая линия L называется его *векторной линией*, если в каждой точке поля касательный вектор этой линии сонаправлен с векторным полем. Если векторное поле определяется вектором $\vec{a}(M) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$, то дифференциальные уравнения векторных линий имеют вид:

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}.$$

Интегрирование системы двух дифференциальных уравнений дает систему двух конечных уравнений

$$\begin{cases} \varphi_1(x,y,z) = C_1, \\ \varphi_2(x,y,z) = C_2 \end{cases},$$

которые, рассматриваемые в совокупности, определяют двухпараметрическое семейство векторных линий.

Уравнения векторных линий могут быть выражены и в криволинейных координатах (векторное поле выглядит следующим образом: $\vec{a} = a_1(q_1,q_2,q_3)\vec{e}_1 + a_2(q_1,q_2,q_3)\vec{e}_2 + a_3(q_1,q_2,q_3)\vec{e}_3$):

$$\frac{H_1 d\vec{q}_1}{a_1(q_1,q_2,q_3)} = \frac{H_2 d\vec{q}_2}{a_2(q_1,q_2,q_3)} = \frac{H_3 d\vec{q}_3}{a_3(q_1,q_2,q_3)},$$

где $H_i = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2}$, i=1,2,3 – коэффициенты Ламэ данной криволинейной системы координат; q_1=const, q_2=const, q_3=const - координатные поверхности системы криволинейных координат.

В частности, в цилиндрических координатах ($q_1=\rho$ - цилиндры, $q_2=\varphi$ - полуплоскости, $q_3=z$ - плоскости) уравнения векторных линий выглядят следующим образом:

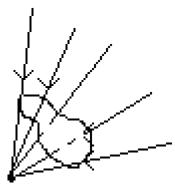
$$\frac{d\rho}{a_1(\rho,\varphi,z)} = \frac{\rho d\varphi}{a_2(\rho,\varphi,z)} = \frac{dz}{a_3(\rho,\varphi,z)}.$$

В сферических координатах ($q_1=r$, $q_2=\theta$, $q_3=\varphi$):

$$\frac{dr}{a_1(r,\theta,\varphi)} = \frac{r d\theta}{a_2(r,\theta,\varphi)} = \frac{r\sin\theta d\varphi}{a_3(r,\theta,\varphi)}.$$

Векторная трубка – векторная поверхность, задаваемая некоторой исходной линией L, образованная векторными линиями, проходящими по одной через каждую точку некоторой невекторной линии.

Например, поле земного тяготения.



Пусть даны непрерывное векторное поле $\vec{a} = \vec{a}(M)$ и кусочно гладкая кривая L, на которой выбрано положительное направление.

Линейным интегралом от векторного поля $\vec{a} = \vec{a}(M)$ вдоль ориентированной кривой L называется криволинейный интеграл первого рода $\int\limits_L (\vec{a},\vec{r}^{\,0})ds$, где $\vec{r}^{\,0} = \vec{r}^{\,0}(M)$ – орт вектора, касательного к линии L, ориентация которого совпадает с ориентацией L; ds – дифференциал длины дуги s кривой L.

В декартовой системе координат $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ и линейный интеграл выразится через криволинейный интеграл второго рода:

$$\int_L (\vec{a}, d\vec{r}) = \int_L P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz\ .$$

Когда $\vec{a} = \vec{a}(M)$ является силовым полем, линейный интеграл дает величину работы этого поля вдоль линии L.

Циркуляцией **Ц** векторного поля $\vec{a} = \vec{a}(M)$ называется линейный интеграл, взятый вдоль замкнутой ориентированной кривой L: $\oint_L (\vec{a}, d\vec{r})$.

В декартовых координатах интеграл по замкнутому контуру выглядит следующим образом:

$$Ц = \oint_L Pdx + Qdy + Rdz \qquad [1].$$

В криволинейных координатах циркуляция имеет вид:

$$\int_L (\vec{a}, d\vec{r}) = \int_L a_1 H_1 dq_1 + \int_L a_2 H_2 dq_2 + \int_L a_3 H_3 dq_3\ .$$

В частности, в цилиндрических координатах:

$$\int_L a_\rho d\rho + a_\varphi \rho d\varphi + a_z dz\ .$$

В сферических координатах:

$$\int_L a_r dr + a_\theta r d\theta + r a_\varphi \sin\theta d\varphi\ .$$

Пример.

<u>Задание</u>:

1. Построить векторные линии векторного поля $\vec{a} = (x^2+1)\vec{i} + 0.1(3x + y^2 - z)\vec{j} + 0.1(2x - 6y + z)\vec{k}$, проходящие через точки A(0, 1, –2), B(-1, 3, 0), C(0, 3, -2).
2. Вычислить циркуляцию векторного поля по окружности радиуса 1.
3. Вычислить линейный интеграл векторного поля вдоль дуги L винтовой линии $x = R\cos t,\ y = R\sin t,\ z = \dfrac{t}{2\pi}$ от точки A пересечения линии с плоскостью z=0 до точки B пересечения с плоскостью z=1.

<u>Решение</u>:

1. Решение задачи начинается со слова restart.

Для начала необходимо задать координаты поля (коэффициенты при базисных векторах в задании поля) через задание функции:

Fx:=(X,Y,Z)->X^2+1;
Fy:=(X,Y,Z)->.1(3*X+Y^2-Z);*
Fz:=(X,Y,Z)->.1(2*X-6*Y+Z);*

Дифференциальные уравнения параметрических уравнений X(t), Y(t), Z(t) векторных линий, проходящих через точку A имеют вид $\dfrac{dx}{dt} = 1, \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{Fy}{Fx}, \dfrac{dz}{dt} = \dfrac{Fz}{Fx}$ [2] с начальными условиями $X(0) = X_A, Y(0) = Y_A, Z(0) = Z_A$. Поэтому, для построения векторных линий в Maple необходимо построить фазовые траектории системы [2]. Координатную плоскость системы дифференциальных уравнений называют *фазовой плоскостью*. В системе [2] возможны три типа фазовых траекторий (кривых): точка, замкнутая кривая и незамкнутая кривая. Решение, траекторией которого является точка (x_0,y_0) (положение равновесия), постоянно: $x(t) = x_0, y(t) = y_0$ для всех t∈R. Замкнутая кривая соответствует периодическому решению, а незамкнутая – непериодическому [25; 338].

В Maple эта команда выглядит следующим образом:

eq1:=D(x)(t)=1;

eq2:=D(y)(t)=Fy(x(t),y(t),z(t))/Fx(x(t),y(t),z(t));

eq3:=D(z)(t)=Fz(x(t),y(t),z(t))/Fx(x(t),y(t),z(t));

Функция *D(x)(t)* дифференцирует x по t.

Далее необходимо применить библиотеку анализа дифференциальных уравнений: *with(DEtools):*

Для построения одной векторной линии можно обойтись командой *g1:=DEplot3d({eq1,eq2,eq3},{x(t),y(t),z(t)},t=0..3,[[x(0)=XA,y(0)=YA,z(0)=ZA]],stepsize=.01, scene=[x(t),y(t),z(t)]):*

где X_A, Y_A, Z_A – координаты точки A.

Чтобы построить несколько линий уровней, необходимо задать список списков, т. е. учесть каждую заданную точку:

g1:=DEplot3d({eq1,eq2,eq3},
{x(t),y(t),z(t)},t=0..3,[[x(0)=xa,y(0)=ya,z(0)=za],[x(0)=xb,y(0)=yb,z(0)=zb],[x(1)=cos(3*Pi/4),y(1)=sin(3*Pi/4),z(1)=cos(3*Pi/4)*sin(3*Pi/4)]],stepsize=.01,
scene=[x(t),y(t),z(t)]):
g2:=spacecurve([cos(t),sin(t),sin(t)*cos(t)],t=0..2*Pi, view=[-3..3,-3..3,-3..3]):
display(g1,g2);

Строка присвоения g2 строит линию, на которой лежат точки, из которых исходят векторные линии.

В результате получатся векторные линии заданного векторного поля, порожденные в заданных точках:

2. В начале необходимо задать коэффициенты при базисных переменных векторного поля в виде функций:

Fx:=(x,y,z)->x^2+1:

*Fy:=(x,y,z)->0.3*x+0.1*y^2-0.1*z:*

*Fz:=(x,y,z)->0.2*x0.6*y+0.1*z:*

Уравнение окружности зададим в параметрическом виде:

phi:=cos(t);

psi:=sin(t);

theta:=1;

Используя формулу [1], найдем циркуляцию векторного поля, задав в Maple следующую команду:

*int(Fx(phi,psi,theta)*diff(phi,t)+Fy(phi,psi,theta)*diff(psi,t)+Fz(phi,psi,theta)*diff(theta,t),t=0..Pi);*

Результатом вычисления будет численное значение циркуляции:

-2.195427769.

3. При пересечении плоскости z=0 с винтовой линией $z = \frac{t}{2\pi} = 0 \Rightarrow t_0 = 0$. При пересечении плоскости z=1 с винтовой линией $z = \frac{t}{2\pi} = 1 \Rightarrow t_1 = 2\pi$. Соответственно эта задача решается аналогично задаче 2, только линия ограничена двумя точками, т. е. в формуле интеграла переменные имеют ограничения в заданных точках.

Задания для самостоятельного решения.

Задание 1: для следующих векторных полей построить векторные линии, проходящие через заданные точки.

Вариант №1. $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, A(1,2,3), B(-1,0,1), C(0,0,1).

Вариант №2. $\vec{a} = (x^2 + y^2)\vec{i} + (x^2 - y)\vec{j}$, A(0,0,1), B(-2,3,1), C(2,1,0).

Вариант №3. $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$, A(0,-5,3), B(-2,2,1), C(1,1,0).

Вариант №4. $\vec{a} = x^2\vec{i} - y^3\vec{j} + z^2\vec{k}$, A(-2,1,1), B(-1,-1,2), C(0,-1,2).

Вариант №5. $\vec{a} = (z - y)\vec{i} + (x - z)\vec{j} + (y - x)\vec{k}$, A(-2,1,0), B(-1,1,0), C(0,1,3).

Вариант №6. $\vec{a} = x\vec{i} + 2y\vec{j}$, A(-1,1,1), B(0,0,2), C(0,-1,2).

Вариант №7. $\vec{a} = 2z\vec{j} + 4y\vec{k}$, A(-1,-2,0), B(5,2,0), C(0,5,-1).

Вариант №8. $\vec{a} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j}$, A(2,1,1), B(3,2,1), C(0,-1,2).

Вариант №9. $\vec{a} = x\vec{i} - y\vec{j}$, A(-1,0,2), B(3,2,0), C(-1,0,1).

Вариант №10. $\vec{a} = z\vec{i} - y\vec{k}$, A(1,1,1), B(-1,0,2), C(2,2,0).

Задание 2: вычислить циркуляцию вдоль заданной замкнутой линии.

Вариант №1. $\vec{a} = -y^3\vec{i} + x^3\vec{j}$ вдоль эллипса $L: \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

Вариант №2. $\vec{a} = ye^{xy}\vec{i} + xe^{xy}\vec{j} + xyz\vec{k}$ вдоль линии L, получаемой пересечением конуса $x^2 + y^2 = (z-1)^2$ с координатными плоскостями.

Вариант №3. $\vec{a} = xy\vec{i} + yz\vec{j} + xz\vec{k}$ вдоль линии $L: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$.

Вариант №4. $\vec{a} = (xz + y)\vec{i} + (yz - x)\vec{j} - (x^2 + y^2)\vec{k}$ вдоль линии $L: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 3 \end{cases}$.

Вариант №5. $\vec{a} = y^2\vec{i} + z^2\vec{j} + x^2\vec{k}$ вдоль линии $L: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \\ x^2 + y^2 = Rx \ \ (z \ge 0) \end{cases}$.

Вариант №6. $\vec{a} = (2x + z)\vec{i} + (2y - z)\vec{j} + xyz\vec{k}$ вдоль линии пересечения параболоида вращения $x^2 + y^2 = 1 - z$ с координатными плоскостями.

Вариант №7. $\vec{a} = x\vec{j} + (y + z)\vec{k}(z - y)\vec{k}$ вдоль линии $x^2 + y^2 = 9$.

Вариант №8. $\vec{a} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j}$ вдоль линии $L: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x + y = 4 \end{cases}$.

Вариант №9. $\vec{a} = x\vec{i} - y\vec{j}$ вдоль линии $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 16$

Вариант №10. $\vec{a} = z\vec{i} - y\vec{k}$ вдоль винтовой линии $x = R\cos t,\ y = R\sin t,\ z = \dfrac{t}{2\pi}$ при t, изменяющемся от 0 до $\dfrac{3\pi}{2}$.

Задание 3: вычислить линейный интеграл вдоль заданного участка линии.

Вариант №1. $\vec{a} = z\vec{i} + x\vec{j} + y\vec{k}$ вдоль прямой AB в направлении от точки A к точке B, где точка A – точка пересечения винтовой линии $x = R\cos t,\ y = R\sin t,\ z = \dfrac{t}{2\pi}$ с плоскостью z=0, точка B – точка пересечения этой линии с плоскостью z=1.

Вариант №2. $\vec{a} = \dfrac{y^2\vec{i} - x^2\vec{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ вдоль полуокружности $x = R\cos t, y = R\sin t\ \ (0 \le t \le \pi)$.

Вариант №3. $\vec{a} = (x^2 + y^2)\vec{i} + (x^2 - y)\vec{j}$ вдоль линии $y = |x|$ от точки (-1,1) до точки (2,2).

Вариант №4. $\vec{a} = (x^2 - 2xy)\vec{i} + (y^2 - 2xy)\vec{j}$ вдоль параболы $y = x^2$ от точки (-1,1) до точки (1,1).

Вариант №5. $\vec{a} = \dfrac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - x - y + 2z}}$ вдоль отрезка прямой от точки (1,1,1) до точки (4,4,4).

Вариант №6. $\vec{a} = (x^2 - 2xy)\vec{i} + (y^2 - 2xy)\vec{j}$ вдоль отрезка прямой, соединяющей точки (-1,1) и (1,1).

Вариант №7. $\vec{a} = (y^2 - z^2)\vec{i} + 2yz\vec{j} - x^2\vec{k}$ вдоль линии $L: \begin{cases} x = t \\ y = t^2 \\ z = t^3 \end{cases}$ $(0 \le t \le 1)$ в направлении возрастания параметра t.

Вариант №8. $\vec{a} = y\vec{i} + z\vec{j} + x\vec{k}$ вдоль витка винтовой линии $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \\ z = bt \end{cases}$ $(0 \le t < 2\pi)$ в направлении возрастания параметра t.

Вариант №9. $\vec{a} = x\vec{i} - y\vec{j}$ вдоль линии $x = R\cos t, y = R\sin t\ \ (0 \le t \le \pi)$.

Вариант №10. $\vec{a} = z\vec{i} - y\vec{k}$ вдоль параболы $y = x^2$ от точки (-2,4) до точки (3,9).

Контрольные вопросы.

1. Какое поле называется векторным?
2. Что такое векторные линии, векторные трубки?
3. Какими уравнениями в общем виде задаются векторные линии?
4. Чему равны коэффициенты Ламэ?
5. Вид уравнений векторных линий в криволинейных системах координат?
6. Что такое линейный интеграл векторного поля? Его уравнение в общем виде и в криволинейных координатах.
7. Что такое циркуляция векторного поля? Ее уравнение в общем виде и в криволинейных координатах.

Тема 3: Интегрирование векторной функции скалярного аргумента.

В пространстве или некоторой его части задано *векторное поле* $\vec{F}(M)$, если каждой точке этого пространства поставлен в соответствие некоторый вектор.

Если в пространстве введена декартова система координат, то задание векторного поля $\vec{a} = \vec{a}(M)$ равносильна заданию трех скалярных функций точки P(M), Q(M), R(M), так что

$$\vec{a}(M) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}\ .$$

В векторном поле некоторая линия L называется его *векторной линией*, если в каждой точке поля касательный вектор этой линии сонаправлен с векторным полем. Если векторное поле определяется вектором $\vec{a}(M) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$, то дифференциальные уравнения векторных линий имеют вид:

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}\ .$$

Интегрирование системы двух дифференциальных уравнений дает систему двух конечных уравнений

$$\begin{cases}\varphi_1(x,y,z) = C_1,\\ \varphi_2(x,y,z) = C_2\end{cases},$$

которые, рассматриваемые в совокупности, определяют двухпараметрическое семейство векторных линий.

Уравнения векторных линий могут быть выражены и в криволинейных координатах (векторное поле выглядит следующим образом: $\vec{a} = a_1(q_1,q_2,q_3)\vec{e}_1 + a_2(q_1,q_2,q_3)\vec{e}_2 + a_3(q_1,q_2,q_3)\vec{e}_3$):

$$\frac{H_1 d\vec{q}_1}{a_1(q_1,q_2,q_3)} = \frac{H_2 d\vec{q}_2}{a_2(q_1,q_2,q_3)} = \frac{H_3 d\vec{q}_3}{a_3(q_1,q_2,q_3)},$$

где $H_i = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2}$, i=1,2,3 – коэффициенты Ламэ данной криволинейной системы координат; q_1=const, q_2=const, q_3=const - координатные поверхности системы криволинейных координат.

В частности, в цилиндрических координатах ($q_1=\rho$ - цилиндры, $q_2=\varphi$ - полуплоскости, $q_3=z$ - плоскости) уравнения векторных линий выглядят следующим образом:

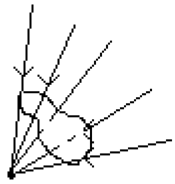
$$\frac{d\rho}{a_1(\rho,\varphi,z)} = \frac{\rho d\varphi}{a_2(\rho,\varphi,z)} = \frac{dz}{a_3(\rho,\varphi,z)}\ .$$

В сферических координатах ($q_1=r$, $q_2=\theta$, $q_3=\varphi$):

$$\frac{dr}{a_1(r,\theta,\varphi)} = \frac{rd\theta}{a_2(r,\theta,\varphi)} = \frac{r\sin\theta d\varphi}{a_3(r,\theta,\varphi)}.$$

Векторная трубка – векторная поверхность, задаваемая некоторой исходной линией L, образованная векторными линиями, проходящими по одной через каждую точку некоторой невекторной линии.

Например, поле земного тяготения.



Пусть даны непрерывное векторное поле $\vec{a} = \vec{a}(M)$ и кусочно гладкая кривая L, на которой выбрано положительное направление.

Линейным интегралом от векторного поля $\vec{a} = \vec{a}(M)$ вдоль ориентированной кривой L называется криволинейный интеграл первого рода $\int\limits_L (\vec{a},\vec{r}^{\,0})ds$, где $\vec{r}^{\,0} = \vec{r}^{\,0}(M)$ – орт вектора, касательного к линии L, ориентация которого совпадает с ориентацией L; ds – дифференциал длины дуги s кривой L.

В декартовой системе координат $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ и линейный интеграл выразится через криволинейный интеграл второго рода:

$$\int_L (\vec{a}, d\vec{r}) = \int_L P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz \,.$$

Когда $\vec{a} = \vec{a}(M)$ является силовым полем, линейный интеграл дает величину работы этого поля вдоль линии L.

Циркуляцией **Ц** векторного поля $\vec{a} = \vec{a}(M)$ называется линейный интеграл, взятый вдоль замкнутой ориентированной кривой L: $\oint_L (\vec{a}, d\vec{r})$.

В декартовых координатах интеграл по замкнутому контуру выглядит следующим образом:

$$Ц = \oint_L Pdx + Qdy + Rdz \qquad [1].$$

В криволинейных координатах циркуляция имеет вид:

$$\int_L (\vec{a}, d\vec{r}) = \int_L a_1 H_1 dq_1 + \int_L a_2 H_2 dq_2 + \int_L a_3 H_3 dq_3 \,.$$

В частности, в цилиндрических координатах:

$$\int_L a_\rho d\rho + a_\varphi \rho d\varphi + a_z dz \,.$$

В сферических координатах:

$$\int_L a_r dr + a_\theta r d\theta + r a_\varphi \sin\theta d\varphi \,.$$

Пример.

Задание:

4. Построить векторные линии векторного поля $\vec{a} = (x^2+1)\vec{i} + 0.1(3x + y^2 - z)\vec{j} + 0.1(2x - 6y + z)\vec{k}$, проходящие через точки A(0, 1, –2), B(-1, 3, 0), C(0, 3, -2).
5. Вычислить циркуляцию векторного поля по окружности радиуса 1.
6. Вычислить линейный интеграл векторного поля вдоль дуги L винтовой линии $x = R\cos t,\ y = R\sin t,\ z = \dfrac{t}{2\pi}$ от точки A пересечения линии с плоскостью z=0 до точки B пересечения с плоскостью z=1.

Решение:

1. Решение задачи начинается со слова restart.

Для начала необходимо задать координаты поля (коэффициенты при базисных векторах в задании поля) через задание функции:

Fx:=(X,Y,Z)->X^2+1;
Fy:=(X,Y,Z)->.1(3*X+Y^2-Z);*
Fz:=(X,Y,Z)->.1(2*X-6*Y+Z);*

Дифференциальные уравнения параметрических уравнений X(t), Y(t), Z(t) векторных линий, проходящих через точку A имеют вид $\dfrac{dx}{dt} = 1, \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{Fy}{Fx}, \dfrac{dz}{dt} = \dfrac{Fz}{Fx}$ [2] с начальными условиями $X(0) = X_A, Y(0) = Y_A, Z(0) = Z_A$. Поэтому, для построения векторных линий в Maple необходимо построить фазовые траектории системы [2]. Координатную плоскость системы дифференциальных уравнений называют *фазовой плоскостью*. В системе [2] возможны три типа фазовых траекторий (кривых): точка, замкнутая кривая и незамкнутая кривая. Решение, траекторией которого является точка (x_0,y_0) (положение равновесия), постоянно: $x(t) = x_0, y(t) = y_0$ для всех t∈R. Замкнутая кривая соответствует периодическому решению, а незамкнутая – непериодическому [25; 338].

В Maple эта команда выглядит следующим образом:

eq1:=D(x)(t)=1;

eq2:=D(y)(t)=Fy(x(t),y(t),z(t))/Fx(x(t),y(t),z(t));

eq3:=D(z)(t)=Fz(x(t),y(t),z(t))/Fx(x(t),y(t),z(t));

Функция *D(x)(t)* дифференцирует x по t.

Далее необходимо применить библиотеку анализа дифференциальных уравнений: *with(DEtools):*

Для построения одной векторной линии можно обойтись командой *g1:=DEplot3d({eq1,eq2,eq3},{x(t),y(t),z(t)},t=0..3,[[x(0)=X$_A$,y(0)=Y$_A$,z(0)=Z$_A$]],stepsize=.01, scene=[x(t),y(t),z(t)]):*

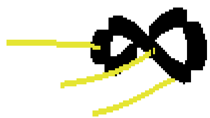
где X_A, Y_A, Z_A – координаты точки A.

Чтобы построить несколько линий уровней, необходимо задать список списков, т. е. учесть каждую заданную точку:

g1:=DEplot3d({eq1,eq2,eq3},
{x(t),y(t),z(t)},t=0..3,[[x(0)=xa,y(0)=ya,z(0)=za],[x(0)=xb,y(0)=yb,z(0)=zb],[x(1)=cos(3*Pi/4),y(1)=sin(3*Pi/4),z(1)=cos(3*Pi/4)*sin(3*Pi/4)]],stepsize=.01,
scene=[x(t),y(t),z(t)]):
g2:=spacecurve([cos(t),sin(t),sin(t)*cos(t)],t=0..2*Pi, view=[-3..3,-3..3,-3..3]):
display(g1,g2);

Строка присвоения g2 строит линию, на которой лежат точки, из которых исходят векторные линии.

В результате получатся векторные линии заданного векторного поля, порожденные в заданных точках:



2. В начале необходимо задать коэффициенты при базисных переменных векторного поля в виде функций:

Fx:=(x,y,z)->x^2+1:

*Fy:=(x,y,z)->0.3*x+0.1*y^2-0.1*z:*

*Fz:=(x,y,z)->0.2*x0.6*y+0.1*z:*

Уравнение окружности зададим в параметрическом виде:

phi:=cos(t);

psi:=sin(t);

theta:=1;

Используя формулу [1], найдем циркуляцию векторного поля, задав в Maple следующую команду:

*int(Fx(phi,psi,theta)*diff(phi,t)+Fy(phi,psi,theta)*diff(psi,t)+Fz(phi,psi,theta)*diff(theta,t),t=0..Pi);*

Результатом вычисления будет численное значение циркуляции:

-2.195427769.

3. При пересечении плоскости z=0 с винтовой линией $z = \frac{t}{2\pi} = 0 \Rightarrow t_0 = 0$. При пересечении плоскости z=1 с винтовой линией $z = \frac{t}{2\pi} = 1 \Rightarrow t_1 = 2\pi$. Соответственно эта

задача решается аналогично задаче 2, только линия ограничена двумя точками, т. е. в формуле интеграла переменные имеют ограничения в заданных точках.

Задания для самостоятельного решения.

Задание 1: для следующих векторных полей построить векторные линии, проходящие через заданные точки.

Вариант №1. $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, A(1,2,3), B(-1,0,1), C(0,0,1).

Вариант №2. $\vec{a} = (x^2 + y^2)\vec{i} + (x^2 - y)\vec{j}$, A(0,0,1), B(-2,3,1), C(2,1,0).

Вариант №3. $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$, A(0,-5,3), B(-2,2,1), C(1,1,0).

Вариант №4. $\vec{a} = x^2\vec{i} - y^3\vec{j} + z^2\vec{k}$, A(-2,1,1), B(-1,-1,2), C(0,-1,2).

Вариант №5. $\vec{a} = (z - y)\vec{i} + (x - z)\vec{j} + (y - x)\vec{k}$, A(-2,1,0), B(-1,1,0), C(0,1,3).

Вариант №6. $\vec{a} = x\vec{i} + 2y\vec{j}$, A(-1,1,1), B(0,0,2), C(0,-1,2).

Вариант №7. $\vec{a} = 2z\vec{j} + 4y\vec{k}$, A(-1,-2,0), B(5,2,0), C(0,5,-1).

Вариант №8. $\vec{a} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j}$, A(2,1,1), B(3,2,1), C(0,-1,2).

Вариант №9. $\vec{a} = x\vec{i} - y\vec{j}$, A(-1,0,2), B(3,2,0), C(-1,0,1).

Вариант №10. $\vec{a} = z\vec{i} - y\vec{k}$, A(1,1,1), B(-1,0,2), C(2,2,0).

Задание 2: вычислить циркуляцию вдоль заданной замкнутой линии.

Вариант №1. $\vec{a} = -y^3\vec{i} + x^3\vec{j}$ вдоль эллипса $L: \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

Вариант №2. $\vec{a} = ye^{xy}\vec{i} + xe^{xy}\vec{j} + xyz\vec{k}$ вдоль линии L, получаемой пересечением конуса $x^2 + y^2 = (z-1)^2$ с координатными плоскостями.

Вариант №3. $\vec{a} = xy\vec{i} + yz\vec{j} + xz\vec{k}$ вдоль линии $L: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$.

Вариант №4. $\vec{a} = (xz + y)\vec{i} + (yz - x)\vec{j} - (x^2 + y^2)\vec{k}$ вдоль линии $L: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 3 \end{cases}$.

Вариант №5. $\vec{a} = y^2\vec{i} + z^2\vec{j} + x^2\vec{k}$ вдоль линии $L: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \\ x^2 + y^2 = Rx \ \ (z \ge 0) \end{cases}$.

Вариант №6. $\vec{a} = (2x + z)\vec{i} + (2y - z)\vec{j} + xyz\vec{k}$ вдоль линии пересечения параболоида вращения $x^2 + y^2 = 1 - z$ с координатными плоскостями.

Вариант №7. $\vec{a} = x\vec{j} + (y + z)\vec{k}(z - y)\vec{k}$ вдоль линии $x^2 + y^2 = 9$.

Вариант №8. $\vec{a} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j}$ вдоль линии $L: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x + y = 4 \end{cases}$.

Вариант №9. $\vec{a} = x\vec{i} - y\vec{j}$ вдоль линии $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 16$

Вариант №10. $\vec{a} = z\vec{i} - y\vec{k}$ вдоль винтовой линии $x = R\cos t,\ y = R\sin t,\ z = \dfrac{t}{2\pi}$ при t, изменяющемся от 0 до $\dfrac{3\pi}{2}$.

Задание 3: вычислить линейный интеграл вдоль заданного участка линии.

Вариант №1. $\vec{a} = z\vec{i} + x\vec{j} + y\vec{k}$ вдоль прямой АВ в направлении от точки А к точке В, где точка А – точка пересечения винтовой линии $x = R\cos t,\ y = R\sin t,\ z = \dfrac{t}{2\pi}$ с плоскостью z=0, точка В – точка пересечения этой линии с плоскостью z=1.

Вариант №2. $\vec{a} = \dfrac{y^2\vec{i} - x^2\vec{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ вдоль полуокружности $x = R\cos t, y = R\sin t\ \ (0 \le t \le \pi)$.

Вариант №3. $\vec{a} = (x^2 + y^2)\vec{i} + (x^2 - y)\vec{j}$ вдоль линии $y = |x|$ от точки (-1,1) до точки (2,2).

Вариант №4. $\vec{a} = (x^2 - 2xy)\vec{i} + (y^2 - 2xy)\vec{j}$ вдоль параболы $y = x^2$ от точки (-1,1) до точки (1,1).

Вариант №5. $\vec{a} = \dfrac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - x - y + 2z}}$ вдоль отрезка прямой от точки (1,1,1) до точки (4,4,4).

Вариант №6. $\vec{a} = (x^2 - 2xy)\vec{i} + (y^2 - 2xy)\vec{j}$ вдоль отрезка прямой, соединяющей точки (-1,1) и (1,1).

Вариант №7. $\vec{a} = (y^2 - z^2)\vec{i} + 2yz\vec{j} - x^2\vec{k}$ вдоль линии $L: \begin{cases} x = t \\ y = t^2 \\ z = t^3 \end{cases} (0 \le t \le 1)$ в направлении возрастания параметра t.

Вариант №8. $\vec{a} = y\vec{i} + z\vec{j} + x\vec{k}$ вдоль витка винтовой линии $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \\ z = bt \end{cases} (0 \le t < 2\pi)$ в направлении возрастания параметра t.

Вариант №9. $\vec{a} = x\vec{i} - y\vec{j}$ вдоль линии $x = R\cos t, y = R\sin t\ \ (0 \le t \le \pi)$.

Вариант №10. $\vec{a} = z\vec{i} - y\vec{k}$ вдоль параболы $y = x^2$ от точки (-2,4) до точки (3,9).

Контрольные вопросы.

8. Какое поле называется векторным?
9. Что такое векторные линии, векторные трубки?
10. Какими уравнениями в общем виде задаются векторные линии?
11. Чему равны коэффициенты Ламэ?
12. Вид уравнений векторных линий в криволинейных системах координат?
13. Что такое линейный интеграл векторного поля? Его уравнение в общем виде и в криволинейных координатах.
14. Что такое циркуляция векторного поля? Ее уравнение в общем виде и в криволинейных координатах.

Тема 4: Скалярные поля. Поверхности уровня.

Если в каждой точке пространства или части пространства определено значение некоторой величины, то говорят, что задано *поле* данной величины.

Считается, что в пространстве или некоторой его части задано *скалярное поле*, если каждой точке поставлено в соответствие значение скалярной переменной величины.

Скалярная величина может быть распределена не только в пространстве, но и во времени, тогда такое поле называется *нестационарным*. Если же скалярная величина не зависит от времени, то поле называется *стационарным*.

Пример скалярных полей дает поле температур, электростатическое поле.

Задание скалярного поля осуществляется заданием скалярной функции точки М $u = f(M)$.

Если в пространстве введена декартова система координат xyz, то $u = f(x, y, z)$.

Геометрической характеристикой скалярного поля служат *поверхности уровня* – геометрическое место точек, в которых скалярная функция поля принимает одно и тоже значение. Поверхность уровня данного поля определяется уравнением

$f(x, y, z) = C$, где $C = const$.

Например, в случае поля температур, создаваемого в однородной и изотропной среде точечным источником тепла, поверхности уровня будут сферами с центром в источнике (центрально-симметричное поле). В случае бесконечной равномерно нагретой нити поверхностями уровня будут круговые цилиндры, ось которых совпадает с нитью.

Пример.

Задание: построить поверхности уровня скалярного поля $u = \arcsin\dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

Решение: для того, чтобы построить график искомых поверхностей уровня, необходимо подключиться к библиотеке plots программы Maple с помощью команды «*with(plots):*».

Следующий шаг по осуществлению заданной цели – задание функции, определяющей поверхности уровня:

u:=arcsin(z/sqrt(x^2+y^2));

Теперь можно строить сами поверхности. Для этого используется команда implicitplot3d(u,x=a..b,y=c..d,z=e..f,options). Т. к. по определению поверхностей уровня функция в точках этих поверхностей принимает одно и тоже значение, то примем функцию, равную, нескольких значениям, например, -1/2, -1, 0, 1, 1/2. Интервал значений переменных примем [-10;10]:

G1:=implicitplot3d(u=-1/2,x=-10..10,y=-10..10,z=-10..10,grid=[10,10,10]):
G2:=implicitplot3d(u=-1,x=-10..10,y=-10..10,z=-10..10,grid=[10,10,10]):
G3:=implicitplot3d(u=0,x=-10..10,y=-10..10,z=-10..10,grid=[10,10,10]):
G4:=implicitplot3d(u=1,x=-10..10,y=-10..10,z=-10..10,grid=[10,10,10]):
G5:=implicitplot3d(u=1/2,x=-10..10,y=-10..10,z=-10..10,grid=[10,10,10]):

Для окончательного выведения графика воспользуемся функцией display:

display(G1,G2,G3,G4,G5);

В результате работы данной программы получится график поверхностей уровня заданного скалярного поля, представляющий собой однопараметрическое семейство параллельных плоскостей (рис. 1).

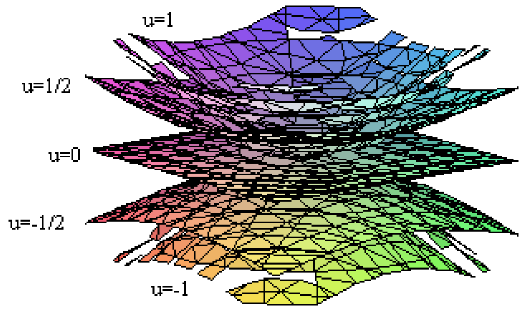


Рис. 1. Поверхности уровня скалярного поля, заданного уравнением

$$u = \arcsin \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Задания для самостоятельного решения.

Задание: построить поверхности уровня для скалярного поля, заданного уравнением:

Вариант №1. $u = x^2 + y^2 - z^2$.

Вариант №2. $u = x + 2y - 3z$.

Вариант №3. $u = e^{(a,r)}$, где а – постоянный вектор, r – радиус-вектор точки.

Вариант №4. $u = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16}$.

Вариант №5. $u = x^2 + y^2 - z$.

Вариант №6. $u = \frac{x^2 + y^2}{z}$.

Вариант №7. $u = 2y^2 + 9z^2$.

Вариант №8. $u = 3^{x+2y-z}$.

Вариант №9. $u = \ln|r|$.

Вариант №10. $u = e^{(a,b,r)}$, где а, b – постоянный вектор, r – радиус-вектор точки.

Контрольные вопросы.

6. Что называется полем?
7. Какое поле называется скалярным?
8. Как задается скалярное поле обычно и в декартовых координатах?
9. Что служит геометрической характеристикой скалярного поля?
10. Чем отличаются нестационарное и стационарное поля?
11. Какая библиотека Maple отвечает за построение графиков?
12. Как задается функция в Maple?
13. Что выполняет команда implicitplot3d?
14. Для чего необходима функция display?
15. задания для работы в аудитории: [2] глава 15 раздел I, № 1-15 (нечетные)
16. задания для самостоятельной работы: [2] глава 15 раздел I, № 1-15 (четные)

Тема 5: Производная по направлению.

Дифференциальными характеристиками скалярного поля являются градиент и производная по направлению.

Пусть есть скалярное поле, определяемое скалярной функцией u=f(M). Возьмем в поле точку M_0 и выберем некоторое направление, определяемое вектором l. Возьмем в поле другую точку М так, чтобы вектор M_0M был параллелен вектору l. Обозначим через Δu разность $f(M)-f(M_0)$, а через Δl - длину вектора M_0M. Отношение $\frac{\Delta u}{\Delta l}$ определяет среднюю скорость изменения скалярного поля на единицу длины по данному направлению. Будем стремить точку М к точке M_0 так, чтобы вектор M_0M оставался все время коллинеарен вектору l. При этом $\Delta l \to 0$.

Если существует при $\Delta l \to 0$ предел отношения $\frac{\Delta u}{\Delta l}$, то его называют *производной* функции u=f(M) в данной точке M_0 *по направлению* l и обозначают символом $\frac{\partial u}{\partial l}$ так, что по определению

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta l} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{f(M) - f(M_0)}{\Delta l}$$, вектор $M_0M \,||\, l$.

В декартовых координатах:

$a(a_x, a_y, a_z)$

$$\frac{\partial u}{\partial a} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma \qquad [1]$$

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|a|}, \cos\beta = \frac{a_y}{|a|}, \cos\gamma = \frac{a_z}{|a|}$$

Градиентом скалярного поля u=f(x,y,z) в данной точке М называется вектор, обозначаемый символом grad(u) и определяемый равенством

$$gradu = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}. \qquad [2]$$

Градиент и производная по направлению связаны следующим образом:

$$\frac{\partial u}{\partial a} = gradu \cdot a_0.$$

Можно выделить следующие *свойства градиента* скалярного поля:

1. $grad(c \cdot u) = c \cdot grad(u)$.
2. $grad(u_1 \pm u_2) = gradu_1 \pm gradu_2$.
3. $grad(u_1 \cdot u_2) = u_1 \cdot grad(u_2) + u_2 \cdot grad(u_1)$.
4. $grad\frac{u_1}{u_2} = \frac{u_2 gradu_1 - u_1 gradu_2}{u_2^2}$.
5. $grad(f(u(M))) = f'(u(M) \cdot grad(u(M))$.
6. $grad(f(u(M), v(M))) = \frac{\partial f}{\partial u} grad(u(M)) + \frac{\partial f}{\partial v} grad(v(M))$.

В криволинейной системе координат градиент имеет вид:

$$gradu = \frac{1}{H_1}\cdot\frac{\partial u}{\partial q_1}\vec{e}_1 + \frac{1}{H_2}\cdot\frac{\partial u}{\partial q_2}\vec{e}_2 + \frac{1}{H_3}\cdot\frac{\partial u}{\partial q_3}\vec{e}_3,$$

где $H_i = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2}$, i=1,2,3 – коэффициенты Ламэ данной криволинейной системы координат; q_1=const, q_2=const, q_3=const - координатные поверхности системы криволинейных координат.

В цилиндрических координатах ($q_1=\rho$, $q_2=\varphi$, $q_3=z$):

$$gradu = \frac{\partial u}{\partial \rho}\vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial u}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{e}_z .$$

В сферических координатах ($q_1=r$, $q_2=\theta$, $q_3=\varphi$):

$$gradu = \frac{\partial u}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\cdot\frac{\partial u}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi .$$

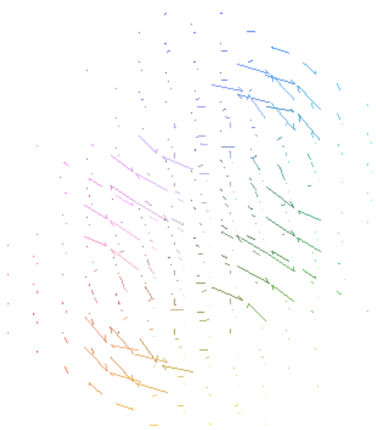
Пример.

Задание: Просчитать координаты градиента поля $u = \sin\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}} + \cos\frac{zx}{y}$, построить поле u и градиент поля. Просчитать производную по направлению.

Решение: для того, чтобы построить графики, необходимо подключиться к библиотеке plots программы Maple с помощью команды «*with(plots):*».

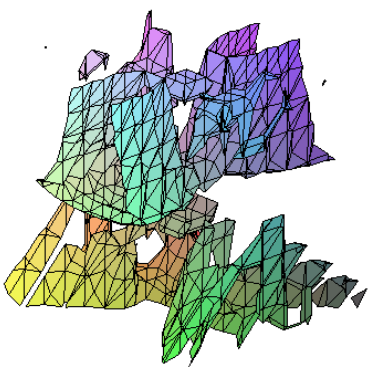
Просчитаем координаты градиента и построим его график. Для начала зададим функцию, градиент которой будем считать: «*u:=sin(z/(x^2+y^2))+cos(z*x/y);*».

Координатами градиента функции являются производные этой функции по каждой из переменных. Поиск производной функции в Maple осуществляется с помощью команды *diff(функция, переменная по которой дифференцируем)*. Найдем производные данной функции: «*diff(u,x): diff(u,y): diff(u,z):*». Чтобы записать полный вид градиента, достаточно воспользоваться формулой [2]. В Maple это будет выглядеть следующим образом: «*gradu:=diff(u,x)*i+diff(u,y)*j+diff(u,z)*k;*».



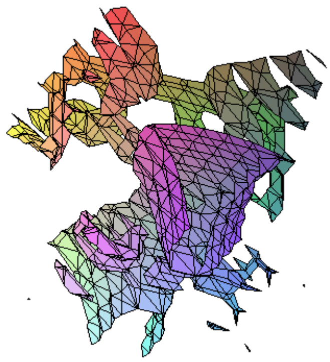
Для построения градиента функции существует специальная функция пакета plots и Maple: «*gradplot3d(u,x=a..b,y=c..d,z=e..f);*». Вместо параметров a, b, c, d, e, f – необходимо подставить числовой диапазон изменения переменной. Пусть для рассматриваемой функции эта команда будет выглядеть следующим образом: «*gradplot3d(u,x=-5..5,y=-5..5,z=-5..5);*».

Само поле строить также как и в ранее выполненных лабораторных работах:



Производную по направлению в Maple можно считать по формуле [1]. Для этого необходимо ввести координаты вектора: ax, ay, az, равные разности координат конечной точки и начальной. По данным координатам находим длину этого вектора: «*r:=sgrt(ax^2+ay^2+az^2);*».

Направляющие косинусы определяются по формулам: «cosa:=ax/r: cosb:=ay/r:



cosc:=az/r». Вычисляются производные и их значения в данной точке. Это можно сделать с помощью команд

diff(u,x);

k1:=eval(%,[x=x0,y=y0,z=z0]),

где функция *eval* возвращает результат вычислений. Знак *%* применяется для использования в происходящем вычислении результат предыдущего шага вычислений.

Все полученные данные подставляем в формулу [1] и получаем значение производной по направлению данного скалярного поля:

*l := (-1/2*cos(1/2)-sin(1))/sgrt(17)+4*(1/2*cos(1/2)-sin(1))/sgrt(17).*

Задания для самостоятельного решения.

Задание: для следующих скалярных полей посчитать градиент и производную по направлению в точках М, построить поверхности уровня и градиент скалярного поля.

Вариант №1. $u = 2x - y + 4z$, М (1,3,-1).

Вариант №2. $u = \ln\sqrt{\frac{y+z}{2x}}$, М(1,1,1).

Вариант №3. $u = \frac{y^2 + z^2}{x}$, М (0,0,-2).

Вариант №4. $u = ze^{x^2+y^2+z^2}$, М (0,0,0).

Вариант №5. $u = (a, b, r)$, где a, b – постоянные вектора, r – радиус-вектор точки; М (-1, 2,1).

Вариант №6. $u = x - y$, М (-1,-1,1).

Вариант №7. $u = x$, М (0, -1,1).

Вариант №8. $u = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$, М (1,1,-1).

Вариант №9. $u = 2x^2 + y + z$, М (1,1,1).

Вариант №10. $u = 2x - 1$, М (0,0,-2).

Контрольные вопросы.

1. Дайте определение производной по направлению.
2. Как обозначается производная по направлению? По какой формуле она вычисляется?
3. По какой формуле вычисляется производная по направлению в декартовых координатах?
4. Дайте определение градиента скалярного поля.
5. Запишите его обозначение и вычисление (общее и в декартовых координатах).
6. Перечислите свойства градиента.
7. Чему равны коэффициенты Ламэ?
8. Какие величины являются осями сферической и цилиндрической системы координат?

Тема 6: Градиент.

Дифференциальными характеристиками скалярного поля являются градиент и производная по направлению.

Пусть есть скалярное поле, определяемое скалярной функцией u=f(M). Возьмем в поле точку M_0 и выберем некоторое направление, определяемое вектором l. Возьмем в поле другую точку М так, чтобы вектор M_0M был параллелен вектору l. Обозначим через Δu разность f(M)-f(M_0), а через Δl - длину вектора M_0M. Отношение $\frac{\Delta u}{\Delta l}$ определяет среднюю скорость изменения скалярного поля на единицу длины по данному направлению. Будем стремить точку М к точке M_0 так, чтобы вектор M_0M оставался все время коллинеарен вектору l. При этом $\Delta l \to 0$.

Если существует при $\Delta l \to 0$ предел отношения $\frac{\Delta u}{\Delta l}$, то его называют *производной* функции u=f(M) в данной точке M_0 *по направлению* l и обозначают символом $\frac{\partial u}{\partial l}$ так, что по определению

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta l} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{f(M) - f(M_0)}{\Delta l}$$, вектор $M_0M \,||\, l$.

В декартовых координатах:

$a(a_x, a_y, a_z)$

$$\frac{\partial u}{\partial a} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma \qquad [1]$$

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|a|}, \cos\beta = \frac{a_y}{|a|}, \cos\gamma = \frac{a_z}{|a|}$$

Градиентом скалярного поля u=f(x,y,z) в данной точке М называется вектор, обозначаемый символом grad(u) и определяемый равенством

$$gradu = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}. \qquad [2]$$

Градиент и производная по направлению связаны следующим образом:

$$\frac{\partial u}{\partial a} = gradu \cdot a_0.$$

Можно выделить следующие *свойства градиента* скалярного поля:

1. $grad(c \cdot u) = c \cdot grad(u)$.
2. $grad(u_1 \pm u_2) = gradu_1 \pm gradu_2$.
3. $grad(u_1 \cdot u_2) = u_1 \cdot grad(u_2) + u_2 \cdot grad(u_1)$.
4. $grad\,\frac{u_1}{u_2} = \frac{u_2 gradu_1 - u_1 gradu_2}{u_2^2}$.
5. $grad(f(u(M))) = f'(u(M) \cdot grad(u(M))$.
6. $grad(f(u(M), v(M))) = \frac{\partial f}{\partial u} grad(u(M)) + \frac{\partial f}{\partial v} grad(v(M))$.

В криволинейной системе координат градиент имеет вид:

$$gradu = \frac{1}{H_1} \cdot \frac{\partial u}{\partial q_1}\vec{e}_1 + \frac{1}{H_2} \cdot \frac{\partial u}{\partial q_2}\vec{e}_2 + \frac{1}{H_3} \cdot \frac{\partial u}{\partial q_3}\vec{e}_3,$$

где $H_i = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2}$, i=1,2,3 – коэффициенты Ламэ данной криволинейной системы координат; q_1=const, q_2=const, q_3=const - координатные поверхности системы криволинейных координат.

В цилиндрических координатах ($q_1=\rho$, $q_2=\varphi$, $q_3=z$):

$$gradu = \frac{\partial u}{\partial \rho}\vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial u}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{e}_z.$$

В сферических координатах (q_1=r, q_2=θ, q_3=φ):

$$gradu = \frac{\partial u}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\cdot\frac{\partial u}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi.$$

Пример.

Задание: Просчитать координаты градиента поля $u = \sin\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}} + \cos\frac{zx}{y}$, построить поле u и градиент поля. Просчитать производную по направлению.

Решение: для того, чтобы построить графики, необходимо подключиться к библиотеке plots программы Maple с помощью команды «*with(plots):*».

Просчитаем координаты градиента и построим его график. Для начала зададим функцию, градиент которой будем считать: «*u:=sin(z/(x^2+y^2))+cos(z*x/y);*».

Координатами градиента функции являются производные этой функции по каждой из переменных. Поиск производной функции в Maple осуществляется с помощью команды *diff(функция, переменная по которой дифференцируем)*. Найдем производные данной функции: «*diff(u,x): diff(u,y): diff(u,z):*». Чтобы записать полный вид градиента, достаточно воспользоваться формулой [2]. В Maple это будет выглядеть следующим образом: «*gradu:=diff(u,x)*i+diff(u,y)*j+diff(u,z)*k;*».

Для построения градиента функции существует специальная функция пакета plots и Maple: «*gradplot3d(u,x=a..b,y=c..d,z=e..f);*». Вместо параметров a, b, c, d, e, f – необходимо подставить числовой диапазон изменения переменной. Пусть для рассматриваемой функции эта команда будет выглядеть следующим образом: «*gradplot3d(u,x=-5..5,y=-5..5,z=-5..5);*».

Само поле строить также как и в ранее выполненных лабораторных работах:

Производную по направлению в Maple можно считать по формуле [1]. Для этого необходимо ввести координаты вектора: ax, ay, az, равные разности координат конечной точки и начальной. По данным координатам находим длину этого вектора: «*r:=sgrt(ax^2+ay^2+az^2);*».

Направляющие косинусы определяются по формулам: «cosa:=ax/r: cosb:=ay/r: cosc:=az/r». Вычисляются производные и их значения в данной точке. Это можно сделать с помощью команд

diff(u,x);

k1:=eval(%,[x=x0,y=y0,z=z0]),

где функция *eval* возвращает результат вычислений. Знак *%* применяется для использования в происходящем вычислении результат предыдущего шага вычислений.

Все полученные данные подставляем в формулу [1] и получаем значение производной по направлению данного скалярного поля:

*l := (-1/2*cos(1/2)-sin(1))/sgrt(17)+4*(1/2*cos(1/2)-sin(1))/sgrt(17).*

Задания для самостоятельного решения.

Задание: для следующих скалярных полей посчитать градиент и производную по направлению в точках М, построить поверхности уровня и градиент скалярного поля.

Вариант №1. $u = 2x - y + 4z$, М (1,3,-1).

Вариант №2. $u = \ln\sqrt{\dfrac{y+z}{2x}}$, M(1,1,1).

Вариант №3. $u = \dfrac{y^2+z^2}{x}$, M (0,0,-2).

Вариант №4. $u = ze^{x^2+y^2+z^2}$, M (0,0,0).

Вариант №5. $u = (a,b,r)$, где a, b – постоянные вектора, r – радиус-вектор точки; M (-1, 2,1).

Вариант №6. $u = x - y$, M (-1,-1,1).

Вариант №7. $u = x$, M (0, -1,1).

Вариант №8. $u = \ln(x^2+y^2+z^2)$, M (1,1,-1).

Вариант №9. $u = 2x^2 + y + z$, M (1,1,1).

Вариант №10. $u = 2x - 1$, M (0,0,-2).

Контрольные вопросы.

1. Дайте определение производной по направлению.
2. Как обозначается производная по направлению? По какой формуле она вычисляется?
3. По какой формуле вычисляется производная по направлению в декартовых координатах?
4. Дайте определение градиента скалярного поля.
5. Запишите его обозначение и вычисление (общее и в декартовых координатах).
6. Перечислите свойства градиента.
7. Чему равны коэффициенты Ламэ?
8. Какие величины являются осями сферической и цилиндрической системы координат?

Тема 7: Линейный интеграл.

В пространстве или некоторой его части задано *скалярное поле*, если каждой точке поставлено в соответствие значение скалярной переменной величины.

Скалярное поле называется *сферическим*, если существует точка такая, что значение поля зависит только от расстояния до этой точки. Оно не является плоским.

Поверхностями уровня являются концентрические сферы.

Пример.

Задание: построить поверхности уровня потенциального поля тяготения, порожденных:

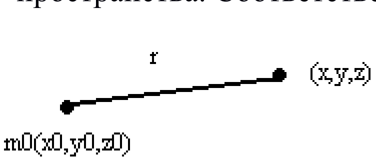
1. Одной точкой с m_0=4 с координатами (-1,2,1).
2. Несколькими точками с массами m_1=2, m_2=4, m_3=7 и координатами A_1(-1, 2, 3), A_2(0, -2 –3), A_3(1, 0, 0).

Решение:

1. Для того чтобы построить график искомых поверхностей уровня, необходимо подключиться к библиотеке plots программы Maple с помощью команды «*with(plots):*».

Потенциальное поле тяготения определяется величиной поля напряженности $E = \gamma\dfrac{m_0}{r^2}$,

где m_0 – масса тела (точки), r – расстояние от этой точки до некоторой точки пространства. Соответственно, поле, порожденное несколькими точками будет



определяться величиной поля напряженности $E = \gamma\sum_i \dfrac{m_i}{r_i^2}$.

В Maple необходимо задать значения m_0, x_0, y_0, z_0. Расстояние между точками задается следующим образом:

$$r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}\ .$$

По этой же формуле и вычисляется расстояние между точками в Maple: *r:=sqrt((x-x0)^2+(y-y0)^2+(z-z0)^2);*

Величина γ - величина, равная $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = \frac{1}{4\cdot 3{,}14\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\,\frac{\Phi}{м}} = 9\cdot 10^9\,\frac{м}{\Phi}$, где ε_0 – электрическая постоянная. В Maple она задается следующим образом: «*i:=9*(10^9);*».

Для построения осталось задать саму функцию: «*E:=i*m0/(r^2);*» (где i – играет роль γ).

Теперь можно строить саму поверхность. Для этого используется команда implicitplot3d(u,x=a..b,y=c..d,z=e..f,options). Т. к. по определению поверхностей уровня функция в точках этих поверхностей принимает одно и тоже значение, то примем функцию, равную, например, 10^9 и 10^{10}. Интервал значений переменных примем [-10;10]:

Q1:=implicitplot3d(u=10^9,x=-10..10,y=-10..10,z=-4..4,color=black):
Q2:=implicitplot3d(u=10^10,x=-10..10,y=-10..10,z=-6..6,color=black):
display(Q1,Q2);

В результате работы данной программы получится график поверхностей уровня поля, порожденного точкой с заданными массой и координатами (рис. 1).

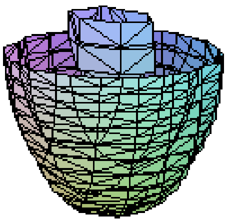
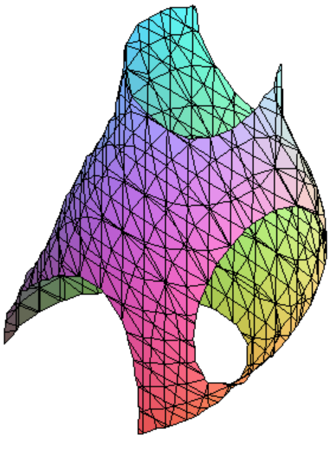


Рис. 1. Поверхности уровня поля, порожденного точкой с массой m_0=4 и координатами (-1,2,1) .

2. Для ситуации с несколькими точками принцип решения аналогичный задаче 1. Отличие состоит лишь в том, что для поля, порожденного несколькими точками величина поля напряженности будет вычисляться по формуле $E = \gamma \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{r_i^2}$. Поэтому в Maple будут задаваться координаты и массы всех точек, для каждой точки вычисляться расстояние до точки поля, величина поля напряженности и затем эти величины сложить.

Для построения поверхностей уровня такого поля необходимо задать несколько значений напряженности, например 10^9, 10^{10} и 10^{12}. И построить их с помощью команды display. Интервалы изменения переменных взять от (-3) до 3.

В результате всех вычислений получатся поверхности уровня поля напряженности, порожденного несколькими точками:



Задания для самостоятельного решения.

Задание: построить поверхности уровня для следующих полей тяготения, порожденных точками с заданными массой m_0 и координатами.

Вариант №1. А (1,3,-2), В (4,-1,2), С (-2,4,0), m_A=3, m_B=1, m_C=2.

Вариант №2. А (0,-1,0), В (1,1,2), С (-2,0,0), m_A=4, m_B=0, m_C=1.

Вариант №3. А (1,1,1), В (2,-1,0), С (-2,3,1), m_A=2, m_B=1, m_C=1.

Вариант №4. А (2,3,0), В (3,1,2), С (1,1,0), m_A=3, m_B=2, m_C=5.
Вариант №5. А (3,3,2), В (0,-1,-2), С (-2,1,0), m_A=1, m_B=1, m_C=1.
Вариант №6. А (2,3,2), В (0,1,2), С (2,1,0), m_A=0, m_B=1, m_C=4.
Вариант №7. А (1,1,-2), В (1,-1,1), С (0,1,0), m_A=4, m_B=1, m_C=0.
Вариант №8. А (2,3,2), В (2,4,2), С (1,3,0), m_A=2, m_B=1, m_C=1.
Вариант №9. А (3,3,1), В (0,0,2), С (2,3,0), m_A=1, m_B=1, m_C=0.

Контрольные вопросы.

1. Какое поле называется сферическим?
2. Что является поверхностью уровня сферического поля?
3. Каким уравнением задается поле напряженности поля тяготения?
4. Какая библиотека Maple отвечает за построение графиков?
5. Как вводятся постоянные величины в Maple?
6. Как задается функция в Maple?
7. Что выполняет команда implicitplot3d?

Тема 8: Поверхностный интеграл.

В пространстве или некоторой его части задано *скалярное поле*, если каждой точке поставлено в соответствие значение скалярной переменной величины.

Скалярное поле называется *сферическим*, если существует точка такая, что значение поля зависит только от расстояния до этой точки. Оно не является плоским.

Поверхностями уровня являются концентрические сферы.

Пример.

Задание: построить поверхности уровня потенциального поля тяготения, порожденных:

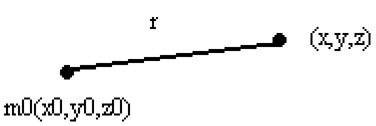
3. Одной точкой с m_0=4 с координатами (-1,2,1).
4. Несколькими точками с массами m_1=2, m_2=4, m_3=7 и координатами A_1(-1, 2, 3), A_2(0, -2 –3), A_3(1, 0, 0).

Решение:

1. Для того чтобы построить график искомых поверхностей уровня, необходимо подключиться к библиотеке plots программы Maple с помощью команды «*with(plots):*».

Потенциальное поле тяготения определяется величиной поля напряженности $E = \gamma \frac{m_0}{r^2}$,

где m_0 – масса тела (точки), r – расстояние от этой точки до некоторой точки пространства. Соответственно, поле, порожденное несколькими точками будет



определяться величиной поля напряженности $E = \gamma \sum_i \frac{m_i}{r_i^2}$.

В Maple необходимо задать значения m_0, x_0, y_0, z_0.

Расстояние между точками задается следующим образом:

$$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}.$$

По этой же формуле и вычисляется расстояние между точками в Maple: *r:=sqrt((x-x0)^2+(y-y0)^2+(z-z0)^2);*

Величина γ - величина, равная $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = \frac{1}{4 \cdot 3{,}14 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \frac{Ф}{м}} = 9 \cdot 10^9 \frac{м}{Ф}$, где ε_0 – электрическая постоянная. В Maple она задается следующим образом: «*i:=9*(10^9);*».

Для построения осталось задать саму функцию: «*E:=i*m0/(r^2);*» (где i – играет роль γ).

Теперь можно строить саму поверхность. Для этого используется команда implicitplot3d(u,x=a..b,y=c..d,z=e..f,options). Т. к. по определению поверхностей уровня функция в точках этих поверхностей принимает одно и тоже значение, то примем функцию, равную, например, 10^9 и 10^{10}. Интервал значений переменных примем [-10;10]:

Q1:=implicitplot3d(u=10^9,x=-10..10,y=-10..10,z=-4..4,color=black):
Q2:=implicitplot3d(u=10^10,x=-10..10,y=-10..10,z=-6..6,color=black):
display(Q1,Q2);

В результате работы данной программы получится график поверхностей уровня поля, порожденного точкой с заданными массой и координатами (рис. 1).

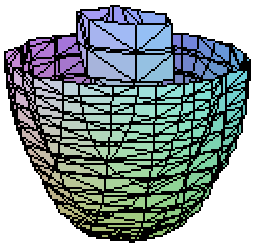
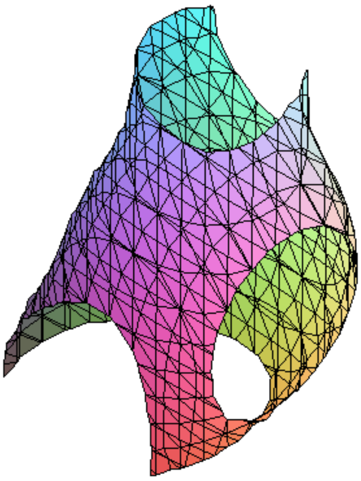


Рис. 1. Поверхности уровня поля, порожденного точкой с массой m_0=4 и координатами (-1,2,1) .

2. Для ситуации с несколькими точками принцип решения аналогичный задаче 1. Отличие состоит лишь в том, что для поля, порожденного несколькими точками величина поля напряженности будет вычисляться по формуле $E=\gamma\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i}{r_i^2}$. Поэтому в Maple будут задаваться координаты и массы всех точек, для каждой точки вычисляться расстояние до точки поля, величина поля напряженности и затем эти величины сложить.

Для построения поверхностей уровня такого поля необходимо задать несколько значений напряженности, например 10^9, 10^{10} и 10^{12}. И построить их с помощью команды display. Интервалы изменения переменных взять от (-3) до 3.

В результате всех вычислений получатся поверхности уровня поля напряженности, порожденного несколькими точками:



Задания для самостоятельного решения.

Задание: построить поверхности уровня для следующих полей тяготения, порожденных точками с заданными массой m_0 и координатами.

Вариант №1. A (1,3,-2), B (4,-1,2), C (-2,4,0), m_A=3, m_B=1, m_C=2.

Вариант №2. A (0,-1,0), B (1,1,2), C (-2,0,0), m_A=4, m_B=0, m_C=1.

Вариант №3. A (1,1,1), B (2,-1,0), C (-2,3,1), m_A=2, m_B=1, m_C=1.

Вариант №4. A (2,3,0), B (3,1,2), C (1,1,0), m_A=3, m_B=2, m_C=5.

Вариант №5. A (3,3,2), B (0,-1,-2), C (-2,1,0), m_A=1, m_B=1, m_C=1.

Вариант №6. A (2,3,2), B (0,1,2), C (2,1,0), m_A=0, m_B=1, m_C=4.

Вариант №7. A (1,1,-2), B (1,-1,1), C (0,1,0), m_A=4, m_B=1, m_C=0.

Вариант №8. A (2,3,2), B (2,4,2), C (1,3,0), m_A=2, m_B=1, m_C=1.

Вариант №9. A (3,3,1), B (0,0,2), C (2,3,0), m_A=1, m_B=1, m_C=0.

Контрольные вопросы.

8. Какое поле называется сферическим?
9. Что является поверхностью уровня сферического поля?
10. Каким уравнением задается поле напряженности поля тяготения?
11. Какая библиотека Maple отвечает за построение графиков?
12. Как вводятся постоянные величины в Maple?
13. Как задается функция в Maple?
14. Что выполняет команда implicitplot3d?

Тема 9: Поток векторного поля через поверхность.

Пусть имеем векторное поле $\vec{a}(M) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$, где координаты P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z) вектора $\vec{a}(M)$ непрерывны в некоторой области G. Пусть S – некоторая гладкая или кусочно гладкая двухсторонняя поверхность, у которой выбрана определенная сторона (ориентированная поверхность).

Потоком П векторного поля $\vec{a} = \vec{a}(M)$ через ориентированную поверхность S называется поверхностный интеграл первого рода по поверхности S от проекции вектора $\vec{a}(M)$ на нормаль $\vec{n}(M)$ к этой поверхности: $\Pi = \iint\limits_S np_{\vec{n}}\vec{a}dS = \iint\limits_S (\vec{a}, \vec{n}^0)dS$, где $\vec{n}^0$ – единичный вектор нормали $\vec{n}(M)$ к выбранной стороне поверхности S, dS – элемент площади поверхности S.

Если α, β, γ - углы, которые образует с осями координат Ox, Oy, Oz нормаль $\vec{n}(M)$ к поверхности S, то поток можно выразить через поверхностный интеграл второго рода:

$$\Pi = \iint\limits_S (P(x,y,z)\cos\alpha + Q(x,y,z)\cos\beta + R(x,y,z)\cos\gamma)dS = \iint\limits_S Pdydz + Qdxdz + Rdxdy.$$

Основные свойства потока векторного поля:

1. Поток меняет знак на обратный с изменением ориентации поверхности (т. е. изменением ориентации нормали n к поверхности S):

$$\iint\limits_{S^+} (\vec{a}, \vec{n}^0)dS = -\iint\limits_{S^-} (\vec{a}, \vec{n}^0)dS,$$

где S^+ - сторона поверхности S, на которой выбрана нормаль $\vec{n}(M)$, а S^- - сторона поверхности, на которой выбрана нормаль (-$\vec{n}(M)$).

2. Свойство линейности:

$$\iint\limits_S (\lambda\vec{a} + \mu\vec{b}, \vec{n}^0)dS = \lambda\iint\limits_S (\vec{a}, \vec{n}^0)dS + \mu\iint\limits_S (\vec{a}, \vec{n}^0)dS,$$

где λ и μ - постоянные числа.

3. Свойство аддитивности: если поверхность S состоит из нескольких гладких частей $S_1,\ldots,S_m$, то поток векторного поля через S равен сумме потоков вектора $\vec{a}(M)$ через поверхности $S_1,\ldots,S_m$:

$$\Pi = \sum_{k=1}^{m} \iint\limits_{S_k} (\vec{a}, \vec{n}^0)dS.$$

Пусть M – изучаемая точка поля. Окружим ее поверхностью σ произвольной формы, например, сферой достаточно малого радиуса. Область, ограниченная поверхностью σ, пусть будет (V), а ее объем V. Рассмотрим отношение $\dfrac{\oiint\limits_\sigma (\vec{a}, \vec{n}^0)d\sigma}{V}$ [1].

Если отношение [1] имеет конечный предел, когда область (V) стягивается к точке M, то этот предел называется *дивергенцией* векторного поля (дивергенцией вектора a) в точке M и обозначается символом div a(M). Так что $div\vec{a}(M)=\lim\limits_{(V)\to M}\frac{\oiint\limits_{\sigma}(\vec{a},\vec{n}^0)d\sigma}{V}$ [2].

Точки M векторного поля $\vec{a}(M)$, в которых $div\vec{a}>0$, называются *источниками*, а точки, в которых $div\vec{a}<0$, называются *стоками* векторного поля.

Дивергенция векторного поля есть скалярная функция точек поля.

Если координаты вектора $\vec{a}(M)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$ имеют непрерывные частные производные $\frac{\partial P}{\partial x},\frac{\partial Q}{\partial y},\frac{\partial R}{\partial z}$ в окрестности точки M (x,y,z), то, пользуясь *инвариантным определением* дивергенции, из теоремы Гаусса-Остроградского получаем, что $div\vec{a}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$ [3]. Формула Остроградского-Гаусса выглядит следующим образом: $\oiint\limits_{\sigma}(\vec{a},\vec{n}^0)d\sigma=\iiint\limits_{V}div\vec{a}dv$.

Основные свойства дивергенции:

1. $div(\vec{F}_1+\vec{F}_2)=div\vec{F}_1+div\vec{F}_2$.
2. $div(a\vec{F})=adiv\vec{F}$.
3. $div(u\cdot\vec{F})=udiv\vec{F}+\vec{F}gradu$.

В криволинейных координатах дивергенция выражается следующим образом:

$$div\vec{a}=\frac{1}{H_1H_2H_3}\left[\frac{\partial(a_1H_2H_3)}{\partial q_1}+\frac{\partial(a_2H_1H_3)}{\partial q_2}+\frac{\partial(a_3H_1H_2)}{\partial q_3}\right],$$ где

$H_i=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2}$, i=1,2,3 – коэффициенты Ламэ данной криволинейной системы координат; q_1=const, q_2=const, q_3=const - координатные поверхности системы криволинейных координат.

В частности, в цилиндрических координатах ($q_1=\rho$, $q_2=\varphi$, $q_3=z$):

$$div\vec{a}=\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial(\rho a_1)}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial a_2}{\partial\varphi}+\frac{\partial a_3}{\partial z}.$$

В сферических координатах ($q_1=r$, $q_2=\theta$, $q_3=\varphi$):

$$div\vec{a}=\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial(r^2a_1)}{\partial r}+\frac{1}{r\sin\theta}\cdot\frac{\partial(\sin\theta\cdot a_2)}{\partial\theta}+\frac{1}{r\sin\varphi}\cdot\frac{\partial a_3}{\partial\varphi}.$$

Если во всех точках M некоторой области G дивергенция векторного поля (заданного в области G) равна нулю, то говорят, что поле *соленоидально* в этой области.

Таким образом, по определению, соленоидальное поле не имеет ни источников, ни стоков.

В соленоидальном поле G векторные линии не могут ни начинаться, ни кончаться. Они могут быть либо замкнутыми кривыми, либо иметь концы на границе поля.

Пример.

<u>Задание</u>:

1. Вычислить дивергенцию поля $\vec{a} = x\vec{i}$ и определить, соленоидально ли оно. Вычислить поток поля.
2. Вычислить поток векторного поля $\vec{a} = 8x\vec{i} + 11y\vec{j} + 17z\vec{k}$ через внешнюю сторону части поверхности $z = 1 - x^2 - y^2$, расположенной над плоскостью xOy, используя формулу Гаусса-Остроградского.

Решение: написание программы начинаем со слова *restart*.

1. Просчитаем координаты дивергенции и подставим в формулу [3]. Для начала зададим функцию, дивергенцию которой будем считать:

ax:=x:
ay:=0:
az:=0:
a:=ax+ay+az;

Координатами дивергенции функции являются производные соответствующих слагаемых функции. Поиск производной функции в Maple осуществляется с помощью команды *diff(функция, переменная по которой дифференцируем)*. Полный вид дивергенции записывается по формуле [3] обычным присвоением. Результат в Maple выглядит следующим образом: *div=1*.

Для того чтобы определить, соленоидально ли поле, необходимо найти его дивергенцию и проверить, равна ли она нулю.

2. Задайте в программе коэффициенты функции при базисных векторах как

*ax:=8*x:*
*ay:=11*y:*
*az:=17*z:*

Просчитайте их производные по x, y, z соответственно и вычислите тройной интеграл от суммы производных. В Maple определенный интеграл задается функцией *int(подынтегральная функция, пределы изменения переменной интегрирования)*.В данном примере она будет выглядеть следующим образом:

int(int(int(k1+k2+k3,x=-sqrt((1-z)^2-y^2)..sqrt((1-z)^2-y^2)),y=-1+z..1-z),z=0..1);

Результатом вычисления будет значение потока векторного поля, вычисленного по формуле Гаусса-Остроградского: *36*Pi*.

Задания для самостоятельного решения.

Задание 1: для следующих векторных полей вычислить дивергенцию в точках M, определить, является ли поле соленоидальным. Вычислить поток поля. Выяснить наличие у поля источников или стоков.

Вариант №1. $\vec{a} = x(z^2 - y^2)\vec{i} + y(x^2 - z^2)\vec{j} + z(y^2 - x^2)\vec{k}$, M (1,3,-1).

Вариант №2. $\vec{a} = (1 + 2xy)\vec{i} - y^2 z\vec{j} + (z^2 y - 2xy + 1)\vec{k}$, M(1,1,1).

Вариант №3. $\vec{a} = x\vec{i}$, M (0,0,-2).

Вариант №4. $\vec{a} = (x^2 - y)\vec{i} + (y^2 - x)\vec{j}$, M (0,0,0).

Вариант №5. $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, M (-1, 2,1).

Вариант №6. $\vec{a} = (xy + xz)\vec{i} + (yz + xz)\vec{j} + (xy + xz)\vec{k}$, M (-1,-1,1).

Вариант №7. $\vec{a} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$, M (0, -1,1).

Вариант №8. $\vec{a} = \frac{x}{y}\vec{i} + \frac{y}{z}\vec{j} + \frac{x}{z}\vec{k}$, M (1,1,-1).

Вариант №9. $\vec{a} = y\vec{j}$, M (1,1,1).

Вариант №10. $\vec{a} = z\vec{i}$, M (0,0,-2).

Задание 2: вычислить поток векторного поля $\vec{a}$ через указанные поверхности, используя формулу Гаусса-Остроградского.

Вариант №1. $\vec{a} = x(z^2 - y^2)\vec{i} + y(x^2 - z^2)\vec{j} + z(y^2 - x^2)\vec{k}$ через поверхность $y^2 = 4-(x-1)^2 - z^2$ $(0 \le z \le 1)$.

Вариант №2. $\vec{a} = (1-2xy)\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ через поверхность $S: x^2 + y^2 = z^2$ $(0 \le z \le 4)$.

Вариант №3. $\vec{a} = z^2\vec{i} + xz\vec{j} + y\vec{k}$ через поверхность $x^2 + y^2 = 4 - z\,(z \ge 0)$.

Вариант №4. $\vec{a} = (y^2 + z^2)\vec{i} - y^2\vec{j} + 2yz\vec{k}$ через поверхность $x^2 + z^2 = y^2$ $(0 \le y \le 1)$.

Вариант №5. $\vec{a} = \left(\dfrac{x^2 y}{1+y^2} + 6yz^2\right)\vec{i} + 2x\,arctg\,y\vec{j} - \dfrac{2xz(1+y)+1+y^2}{1+y^2}\vec{k}$ через внешнюю сторону части поверхности $z = 1 - x^2 - y^2$, расположенную над плоскостью xOy.

Вариант №6. $\vec{a} = (xy + xz)\vec{i} + (yz + xz)\vec{j} + (xy + xz)\vec{k}$ через поверхность $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ $(0 \le z \le 2)$.

Вариант №7. $\vec{a} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$ через поверхность $y^2 = 4-(x-1)^2 - z^2$ $(0 \le y \le 1)$.

Вариант №8. $\vec{a} = \dfrac{x}{y}\vec{i} + \dfrac{y}{z}\vec{j} + \dfrac{x}{z}\vec{k}$ через поверхность $x^2 + y^2 = 4 - z\,(1 \le z \le 2)$.

Вариант №9. $\vec{a} = x^2\vec{i} + y\vec{j}$ через поверхность $x = y^2 + z^2$ $(0 \le x \le 2.5)$.

Вариант №10. $\vec{a} = z\vec{i}$ через поверхность $\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{4} = -\dfrac{z^2}{5}$ $(0 \le x \le 2)$.

Контрольные вопросы.

1. Дайте определение дивергенции векторного поля.
2. Как она обозначается?
3. По какой формуле вычисляется поток векторного поля?
4. Если нормаль образует с координатными осями углы, то по какой формуле можно вычислять поток?
5. Запишите основные свойства потока.
6. Дайте определение дивергенции векторного поля.
7. Что такое стоки и источники?
8. По какой формуле вычисляется дивергенция? Какие формулы верны для вычисления дивергенции в криволинейных координатах?
9. Перечислите основные свойства дивергенции.
10. Какое поле называется соленоидальным?
11. Чему равны коэффициенты Ламэ?
12. Какие величины являются осями сферической и цилиндрической системы координат?
13. Какой командой в Maple задается интеграл?
14. Как задается функция в Maple?

Тема 10: Дивергенция.

Пусть имеем векторное поле $\vec{a}(M) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$, где координаты P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z) вектора $\vec{a}(M)$ непрерывны в некоторой области G.

Пусть S – некоторая гладкая или кусочно гладкая двухсторонняя поверхность, у которой выбрана определенная сторона (ориентированная поверхность).

Потоком П векторного поля $\vec{a}=\vec{a}(M)$ через ориентированную поверхность S называется поверхностный интеграл первого рода по поверхности S от проекции вектора $\vec{a}(M)$ на нормаль $\vec{n}(M)$ к этой поверхности: $\Pi=\iint_S np_{\vec{n}}\vec{a}dS=\iint_S(\vec{a},\vec{n}^0)dS$, где $\vec{n}^0$ – единичный вектор нормали $\vec{n}(M)$ к выбранной стороне поверхности S, dS – элемент площади поверхности S.

Если α, β, γ - углы, которые образует с осями координат Ox, Oy, Oz нормаль $\vec{n}(M)$ к поверхности S, то поток можно выразить через поверхностный интеграл второго рода:

$$\Pi=\iint_S(P(x,y,z)\cos\alpha+Q(x,y,z)\cos\beta+R(x,y,z)\cos\gamma)dS=\iint_S Pdydz+Qdxdz+Rdxdy.$$

Основные свойства потока векторного поля:

1. Поток меняет знак на обратный с изменением ориентации поверхности (т. е. изменением ориентации нормали n к поверхности S):

$$\iint_{S^+}(\vec{a},\vec{n}^0)dS=-\iint_{S^-}(\vec{a},\vec{n}^0)dS,$$

где S^+ - сторона поверхности S, на которой выбрана нормаль $\vec{n}(M)$, а S^- - сторона поверхности, на которой выбрана нормаль (-$\vec{n}(M)$).

2. Свойство линейности:

$$\iint_S(\lambda\vec{a}+\mu\vec{b},\vec{n}^0)dS=\lambda\iint_S(\vec{a},\vec{n}^0)dS+\mu\iint_S(\vec{a},\vec{n}^0)dS,$$

где λ и μ - постоянные числа.

3. Свойство аддитивности: если поверхность S состоит из нескольких гладких частей $S_1,\dots,S_m$, то поток векторного поля через S равен сумме потоков вектора $\vec{a}(M)$ через поверхности $S_1,\dots,S_m$:

$$\Pi=\sum_{k=1}^{m}\iint_{S_k}(\vec{a},\vec{n}^0)dS.$$

Пусть M – изучаемая точка поля. Окружим ее поверхностью σ произвольной формы, например, сферой достаточно малого радиуса. Область, ограниченная поверхностью σ, пусть будет (V), а ее объем V. Рассмотрим отношение $\dfrac{\oiint_\sigma(\vec{a},\vec{n}^0)d\sigma}{V}$ [1].

Если отношение [1] имеет конечный предел, когда область (V) стягивается к точке M, то этот предел называется *дивергенцией* векторного поля (дивергенцией вектора a) в точке M и обозначается символом div a(M). Так что $div\vec{a}(M)=\lim\limits_{(V)\to M}\dfrac{\oiint_\sigma(\vec{a},\vec{n}^0)d\sigma}{V}$ [2].

Точки M векторного поля $\vec{a}(M)$, в которых $div\vec{a}>0$, называются *источниками*, а точки, в которых $div\vec{a}<0$, называются *стоками* векторного поля.

Дивергенция векторного поля есть скалярная функция точек поля.

Если координаты вектора $\vec{a}(M) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$ имеют непрерывные частные производные $\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial z}$ в окрестности точки M (x,y,z), то, пользуясь *инвариантным определением* дивергенции, из теоремы Гаусса-Остроградского получаем, что $div\vec{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$ [3]. Формула Остроградского-Гаусса выглядит следующим образом: $\oiint\limits_{\sigma} (\vec{a}, \vec{n}^0) d\sigma = \iiint\limits_{V} div\vec{a} dv$.

Основные свойства дивергенции:

1. $div(\vec{F}_1 + \vec{F}_2) = div\vec{F}_1 + div\vec{F}_2$.
2. $div(a\vec{F}) = adiv\vec{F}$.
3. $div(u \cdot \vec{F}) = udiv\vec{F} + \vec{F}gradu$.

В криволинейных координатах дивергенция выражается следующим образом: $div\vec{a} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3}\left[\frac{\partial(a_1 H_2 H_3)}{\partial q_1} + \frac{\partial(a_2 H_1 H_3)}{\partial q_2} + \frac{\partial(a_3 H_1 H_2)}{\partial q_3}\right]$, где $H_i = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2}$, i=1,2,3 – коэффициенты Ламэ данной криволинейной системы координат; q_1=const, q_2=const, q_3=const - координатные поверхности системы криволинейных координат.

В частности, в цилиндрических координатах ($q_1=\rho$, $q_2=\varphi$, $q_3=z$):

$$div\vec{a} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial(\rho a_1)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial a_2}{\partial \varphi} + \frac{\partial a_3}{\partial z}.$$

В сферических координатах ($q_1=r$, $q_2=\theta$, $q_3=\varphi$):

$$div\vec{a} = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial(r^2 a_1)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta} \cdot \frac{\partial(\sin\theta \cdot a_2)}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\varphi} \cdot \frac{\partial a_3}{\partial \varphi}.$$

Если во всех точках M некоторой области G дивергенция векторного поля (заданного в области G) равна нулю, то говорят, что поле *соленоидально* в этой области.

Таким образом, по определению, соленоидальное поле не имеет ни источников, ни стоков.

В соленоидальном поле G векторные линии не могут ни начинаться, ни кончаться. Они могут быть либо замкнутыми кривыми, либо иметь концы на границе поля.

Пример.

Задание:

3. Вычислить дивергенцию поля $\vec{a} = x\vec{i}$ и определить, соленоидально ли оно. Вычислить поток поля.

4. Вычислить поток векторного поля $\vec{a} = 8x\vec{i} + 11y\vec{j} + 17z\vec{k}$ через внешнюю сторону части поверхности $z = 1 - x^2 - y^2$, расположенной над плоскостью xOy, используя формулу Гаусса-Остроградского.

Решение: написание программы начинаем со слова *restart*.

2. Просчитаем координаты дивергенции и подставим в формулу [3]. Для начала зададим функцию, дивергенцию которой будем считать:

ax:=x:
ay:=0:
az:=0:
a:=ax+ay+az;

Координатами дивергенции функции являются производные соответствующих слагаемых функции. Поиск производной функции в Maple осуществляется с помощью команды *diff(функция, переменная по которой дифференцируем)*. Полный вид дивергенции записывается по формуле [3] обычным присвоением. Результат в Maple выглядит следующим образом: *div=1*.

Для того чтобы определить, соленоидально ли поле, необходимо найти его дивергенцию и проверить, равна ли она нулю.

3. Задайте в программе коэффициенты функции при базисных векторах как
*ax:=8*x:*
*ay:=11*y:*
*az:=17*z:*

Просчитайте их производные по x, y, z соответственно и вычислите тройной интеграл от суммы производных. В Maple определенный интеграл задается функцией *int(подынтегральная функция, пределы изменения переменной интегрирования)*.В данном примере она будет выглядеть следующим образом:

int(int(int(k1+k2+k3,x=-sqrt((1-z)^2-y^2)..sqrt((1-z)^2-y^2)),y=-1+z..1-z),z=0..1);

Результатом вычисления будет значение потока векторного поля, вычисленного по формуле Гаусса-Остроградского: *36*Pi*.

Задания для самостоятельного решения.

Задание 1: для следующих векторных полей вычислить дивергенцию в точках M, определить, является ли поле соленоидальным. Вычислить поток поля. Выяснить наличие у поля источников или стоков.

Вариант №1. $\vec{a} = x(z^2 - y^2)\vec{i} + y(x^2 - z^2)\vec{j} + z(y^2 - x^2)\vec{k}$, M (1,3,-1).

Вариант №2. $\vec{a} = (1+2xy)\vec{i} - y^2 z\vec{j} + (z^2 y - 2xy + 1)\vec{k}$, M(1,1,1).

Вариант №3. $\vec{a} = x\vec{i}$, M (0,0,-2).

Вариант №4. $\vec{a} = (x^2 - y)\vec{i} + (y^2 - x)\vec{j}$, M (0,0,0).

Вариант №5. $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, M (-1, 2,1).

Вариант №6. $\vec{a} = (xy + xz)\vec{i} + (yz + xz)\vec{j} + (xy + xz)\vec{k}$, M (-1,-1,1).

Вариант №7. $\vec{a} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$, M (0, -1,1).

Вариант №8. $\vec{a} = \frac{x}{y}\vec{i} + \frac{y}{z}\vec{j} + \frac{x}{z}\vec{k}$, M (1,1,-1).

Вариант №9. $\vec{a} = y\vec{j}$, M (1,1,1).

Вариант №10. $\vec{a} = z\vec{i}$, M (0,0,-2).

Задание 2: вычислить поток векторного поля $\vec{a}$ через указанные поверхности, используя формулу Гаусса-Остроградского.

Вариант №1. $\vec{a} = x(z^2 - y^2)\vec{i} + y(x^2 - z^2)\vec{j} + z(y^2 - x^2)\vec{k}$ через поверхность $y^2 = 4 - (x-1)^2 - z^2$ $(0 \le z \le 1)$.

Вариант №2. $\vec{a} = (1 - 2xy)\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ через поверхность $S: x^2 + y^2 = z^2$ $(0 \le z \le 4)$.

Вариант №3. $\vec{a} = z^2\vec{i} + xz\vec{j} + y\vec{k}$ через поверхность $x^2 + y^2 = 4 - z\,(z \ge 0)$.

Вариант №4. $\vec{a} = (y^2 + z^2)\vec{i} - y^2\vec{j} + 2yz\vec{k}$ через поверхность $x^2 + z^2 = y^2\ (0 \le y \le 1)$.

Вариант №5. $\vec{a} = \left(\dfrac{x^2 y}{1+y^2} + 6yz^2\right)\vec{i} + 2x\,arctgy\vec{j} - \dfrac{2xz(1+y)+1+y^2}{1+y^2}\vec{k}$ через внешнюю сторону части поверхности $z = 1 - x^2 - y^2$, расположенную над плоскостью xOy.

Вариант №6. $\vec{a} = (xy + xz)\vec{i} + (yz + xz)\vec{j} + (xy + xz)\vec{k}$ через поверхность $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ (0 ≤ z ≤ 2).

Вариант №7. $\vec{a} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$ через поверхность $y^2 = 4 - (x-1)^2 - z^2$ (0 ≤ y ≤ 1).

Вариант №8. $\vec{a} = \dfrac{x}{y}\vec{i} + \dfrac{y}{z}\vec{j} + \dfrac{x}{z}\vec{k}$ через поверхность $x^2 + y^2 = 4 - z\,(1 \le z \le 2)$.

Вариант №9. $\vec{a} = x^2\vec{i} + y\vec{j}$ через поверхность $x = y^2 + z^2\ (0 \le x \le 2.5)$.

Вариант №10. $\vec{a} = z\vec{i}$ через поверхность $\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{4} = -\dfrac{z^2}{5}$ (0 ≤ x ≤ 2).

Контрольные вопросы.

15. Дайте определение дивергенции векторного поля.
16. Как она обозначается?
17. По какой формуле вычисляется поток векторного поля?
18. Если нормаль образует с координатными осями углы, то по какой формуле можно вычислять поток?
19. Запишите основные свойства потока.
20. Дайте определение дивергенции векторного поля.
21. Что такое стоки и источники?
22. По какой формуле вычисляется дивергенция? Какие формулы верны для вычисления дивергенции в криволинейных координатах?
23. Перечислите основные свойства дивергенции.
24. Какое поле называется соленоидальным?
25. Чему равны коэффициенты Ламэ?
26. Какие величины являются осями сферической и цилиндрической системы координат?
27. Какой командой в Maple задается интеграл?
28. Как задается функция в Maple?

Тема 11: Циркуляция векторного поля по замкнутому контуру.

Пусть имеем векторное поле $\vec{a}(M) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$, где координаты P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z) вектора $\vec{a}(M)$ непрерывны в некоторой области G. Пусть S – некоторая гладкая или кусочно гладкая двухсторонняя поверхность, у которой выбрана определенная сторона (ориентированная поверхность).

Потоком П векторного поля $\vec{a} = \vec{a}(M)$ через ориентированную поверхность S называется поверхностный интеграл первого рода по поверхности S от проекции вектора $\vec{a}(M)$ на нормаль $\vec{n}(M)$ к этой поверхности: $\Pi = \iint\limits_S np_{\vec{n}}\vec{a}dS = \iint\limits_S (\vec{a}, \vec{n}^0)dS$, где $\vec{n}^0$ – единичный вектор нормали $\vec{n}(M)$ к выбранной стороне поверхности S, dS – элемент площади поверхности S.

Если α, β, γ - углы, которые образует с осями координат Ox, Oy, Oz нормаль $\vec{n}(M)$ к поверхности S, то поток можно выразить через поверхностный интеграл второго рода:

$$П = \iint_S (P(x,y,z)\cos\alpha + Q(x,y,z)\cos\beta + R(x,y,z)\cos\gamma)dS = \iint_S Pdydz + Qdxdz + Rdxdy.$$

Основные свойства потока векторного поля:

1. Поток меняет знак на обратный с изменением ориентации поверхности (т. е. изменением ориентации нормали n к поверхности S):

$$\iint_{S^+} (\vec{a}, \vec{n}^0)dS = -\iint_{S^-} (\vec{a}, \vec{n}^0)dS,$$

где S^+ - сторона поверхности S, на которой выбрана нормаль $\vec{n}(M)$, а S^- - сторона поверхности, на которой выбрана нормаль ($-\vec{n}(M)$).

2. Свойство линейности:

$$\iint_S (\lambda\vec{a} + \mu\vec{b}, \vec{n}^0)dS = \lambda\iint_S (\vec{a}, \vec{n}^0)dS + \mu\iint_S (\vec{a}, \vec{n}^0)dS,$$

где λ и μ - постоянные числа.

3. Свойство аддитивности: если поверхность S состоит из нескольких гладких частей $S_1,\ldots,S_m$, то поток векторного поля через S равен сумме потоков вектора $\vec{a}(M)$ через поверхности $S_1,\ldots,S_m$:

$$П = \sum_{k=1}^{m} \iint_{S_k} (\vec{a}, \vec{n}^0)dS.$$

Пусть М – изучаемая точка поля. Окружим ее поверхностью σ произвольной формы, например, сферой достаточно малого радиуса. Область, ограниченная поверхностью σ, пусть будет (V), а ее объем V. Рассмотрим отношение $\dfrac{\oiint_\sigma (\vec{a}, \vec{n}^0)d\sigma}{V}$ [1].

Если отношение [1] имеет конечный предел, когда область (V) стягивается к точке М, то этот предел называется *дивергенцией* векторного поля (дивергенцией вектора a) в точке М и обозначается символом div a(M). Так что $div\vec{a}(M) = \lim\limits_{(V)\to M} \dfrac{\oiint_\sigma (\vec{a}, \vec{n}^0)d\sigma}{V}$ [2].

Точки М векторного поля $\vec{a}(M)$, в которых $div\vec{a} > 0$, называются *источниками*, а точки, в которых $div\vec{a} < 0$, называются *стоками* векторного поля.

Дивергенция векторного поля есть скалярная функция точек поля.

Если координаты вектора $\vec{a}(M) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$ имеют непрерывные частные производные $\dfrac{\partial P}{\partial x}, \dfrac{\partial Q}{\partial y}, \dfrac{\partial R}{\partial z}$ в окрестности точки М (x,y,z), то, пользуясь *инвариантным определением* дивергенции, из теоремы Гаусса-Остроградского получаем, что $div\vec{a} = \dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y} + \dfrac{\partial R}{\partial z}$ [3]. Формула Остроградского-Гаусса выглядит следующим образом: $\oiint_\sigma (\vec{a}, \vec{n}^0)d\sigma = \iiint_V div\vec{a}dv$.

Основные свойства дивергенции:

1. $div(\vec{F}_1 + \vec{F}_2) = div\vec{F}_1 + div\vec{F}_2$.

2. $div(a\vec{F}) = adiv\vec{F}$.

3. $div(u \cdot \vec{F}) = udiv\vec{F} + \vec{F}gradu$.

В криволинейных координатах дивергенция выражается следующим образом:

$div\vec{a} = \frac{1}{H_1H_2H_3}\left[\frac{\partial(a_1H_2H_3)}{\partial q_1} + \frac{\partial(a_2H_1H_3}{\partial q_2} + \frac{\partial(a_3H_1H_2)}{\partial q_3}\right]$, где

$H_i = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2}$, i=1,2,3 – коэффициенты Ламэ данной криволинейной системы координат; q_1=const, q_2=const, q_3=const - координатные поверхности системы криволинейных координат.

В частности, в цилиндрических координатах ($q_1=\rho$, $q_2=\varphi$, $q_3=z$):

$$div\vec{a} = \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial(\rho a_1)}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial a_2}{\partial\varphi} + \frac{\partial a_3}{\partial z}.$$

В сферических координатах ($q_1=r$, $q_2=\theta$, $q_3=\varphi$):

$$div\vec{a} = \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial(r^2a_1)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\cdot\frac{\partial(\sin\theta\cdot a_2)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\varphi}\cdot\frac{\partial a_3}{\partial\varphi}.$$

Если во всех точках М некоторой области G дивергенция векторного поля (заданного в области G) равна нулю, то говорят, что поле *соленоидально* в этой области.

Таким образом, по определению, соленоидальное поле не имеет ни источников, ни стоков.

В соленоидальном поле G векторные линии не могут ни начинаться, ни кончаться. Они могут быть либо замкнутыми кривыми, либо иметь концы на границе поля.

Пример.

Задание:

5. Вычислить дивергенцию поля $\vec{a} = x\vec{i}$ и определить, соленоидально ли оно. Вычислить поток поля.
6. Вычислить поток векторного поля $\vec{a} = 8x\vec{i} + 11y\vec{j} + 17z\vec{k}$ через внешнюю сторону части поверхности $z = 1 - x^2 - y^2$, расположенной над плоскостью xOy, используя формулу Гаусса-Остроградского.

Решение: написание программы начинаем со слова *restart.*

3. Просчитаем координаты дивергенции и подставим в формулу [3]. Для начала зададим функцию, дивергенцию которой будем считать:

ax:=x:
ay:=0:
az:=0:
a:=ax+ay+az;

Координатами дивергенции функции являются производные соответствующих слагаемых функции. Поиск производной функции в Maple осуществляется с помощью команды *diff(функция, переменная по которой дифференцируем)*. Полный вид дивергенции записывается по формуле [3] обычным присвоением. Результат в Maple выглядит следующим образом: *div=1*.

Для того чтобы определить, соленоидально ли поле, необходимо найти его дивергенцию и проверить, равна ли она нулю.

4. Задайте в программе коэффициенты функции при базисных векторах как

*ax:=8*x:*

*ay:=11*y:*
*az:=17*z:*

Просчитайте их производные по x, y, z соответственно и вычислите тройной интеграл от суммы производных. В Maple определенный интеграл задается функцией *int(подынтегральная функция, пределы изменения переменной интегрирования)*.В данном примере она будет выглядеть следующим образом:
int(int(int(k1+k2+k3,x=-sqrt((1-z)^2-y^2)..sqrt((1-z)^2-y^2)),y=-1+z..1-z),z=0..1);

Результатом вычисления будет значение потока векторного поля, вычисленного по формуле Гаусса-Остроградского: *36*Pi*.

Задания для самостоятельного решения.

Задание 1: для следующих векторных полей вычислить дивергенцию в точках М, определить, является ли поле соленоидальным. Вычислить поток поля. Выяснить наличие у поля источников или стоков.

Вариант №1. $\vec{a} = x(z^2 - y^2)\vec{i} + y(x^2 - z^2)\vec{j} + z(y^2 - x^2)\vec{k}$, M (1,3,-1).

Вариант №2. $\vec{a} = (1 + 2xy)\vec{i} - y^2 z\vec{j} + (z^2 y - 2xy + 1)\vec{k}$, M(1,1,1).

Вариант №3. $\vec{a} = x\vec{i}$, M (0,0,-2).

Вариант №4. $\vec{a} = (x^2 - y)\vec{i} + (y^2 - x)\vec{j}$, M (0,0,0).

Вариант №5. $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, M (-1, 2,1).

Вариант №6. $\vec{a} = (xy + xz)\vec{i} + (yz + xz)\vec{j} + (xy + xz)\vec{k}$, M (-1,-1,1).

Вариант №7. $\vec{a} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$, M (0, -1,1).

Вариант №8. $\vec{a} = \frac{x}{y}\vec{i} + \frac{y}{z}\vec{j} + \frac{x}{z}\vec{k}$, M (1,1,-1).

Вариант №9. $\vec{a} = y\vec{j}$, M (1,1,1).

Вариант №10. $\vec{a} = z\vec{i}$, M (0,0,-2).

Задание 2: вычислить поток векторного поля $\vec{a}$ через указанные поверхности, используя формулу Гаусса-Остроградского.

Вариант №1. $\vec{a} = x(z^2 - y^2)\vec{i} + y(x^2 - z^2)\vec{j} + z(y^2 - x^2)\vec{k}$ через поверхность
$y^2 = 4 - (x-1)^2 - z^2$ $(0 \le z \le 1)$.

Вариант №2. $\vec{a} = (1 - 2xy)\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ через поверхность $S: x^2 + y^2 = z^2\ (0 \le z \le 4)$.

Вариант №3. $\vec{a} = z^2\vec{i} + xz\vec{j} + y\vec{k}$ через поверхность $x^2 + y^2 = 4 - z\ (z \ge 0)$.

Вариант №4. $\vec{a} = (y^2 + z^2)\vec{i} - y^2\vec{j} + 2yz\vec{k}$ через поверхность $x^2 + z^2 = y^2\ (0 \le y \le 1)$.

Вариант №5. $\vec{a} = \left(\frac{x^2 y}{1 + y^2} + 6yz^2\right)\vec{i} + 2x\,arctg\,y\vec{j} - \frac{2xz(1 + y) + 1 + y^2}{1 + y^2}\vec{k}$ через внешнюю сторону части поверхности $z = 1 - x^2 - y^2$, расположенную над плоскостью xOy.

Вариант №6. $\vec{a} = (xy + xz)\vec{i} + (yz + xz)\vec{j} + (xy + xz)\vec{k}$ через поверхность $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ $(0 \le z \le 2)$.

Вариант №7. $\vec{a} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$ через поверхность $y^2 = 4 - (x-1)^2 - z^2$ $(0 \le y \le 1)$.

Вариант №8. $\vec{a} = \frac{x}{y}\vec{i} + \frac{y}{z}\vec{j} + \frac{x}{z}\vec{k}$ через поверхность $x^2 + y^2 = 4 - z\,(1 \le z \le 2)$.

Вариант №9. $\vec{a} = x^2\vec{i} + y\vec{j}$ через поверхность $x = y^2 + z^2$ $(0 \le x \le 2.5)$.

Вариант №10. $\vec{a} = z\vec{i}$ через поверхность $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = -\frac{z^2}{5}$ (0 ≤ x ≤ 2).

Контрольные вопросы.

29. Дайте определение дивергенции векторного поля.
30. Как она обозначается?
31. По какой формуле вычисляется поток векторного поля?
32. Если нормаль образует с координатными осями углы, то по какой формуле можно вычислять поток?
33. Запишите основные свойства потока.
34. Дайте определение дивергенции векторного поля.
35. Что такое стоки и источники?
36. По какой формуле вычисляется дивергенция? Какие формулы верны для вычисления дивергенции в криволинейных координатах?
37. Перечислите основные свойства дивергенции.
38. Какое поле называется соленоидальным?
39. Чему равны коэффициенты Ламэ?
40. Какие величины являются осями сферической и цилиндрической системы координат?
41. Какой командой в Maple задается интеграл?
42. Как задается функция в Maple?

Тема 12: Ротор.

Пусть имеем векторное поле $\vec{a}(M) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$. Предположим, что координаты P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z) вектора a(M) непрерывны и имеют непрерывные частные производные первого порядка по всем своим аргументам.

Ротором вектора $\vec{a}(M)$ называется вектор, обозначаемый символом $rot\vec{a}(M)$ и определяемый равенством

$$rot\vec{a} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k} \quad [1]$$

или в символической, удобной для запоминания форме

$$rot\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \quad [2].$$

Этот определитель обычно раскрывается по элементам первой строки, при этом операции умножения элементов второй строки на элементы третьей строки понимаются как операции дифференцирования, например, $\frac{\partial}{\partial x} \cdot Q = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

Ротор векторного поля можно вычислить и как объемную производную:

$$(rot\vec{F})_{M_0} = \lim_{\sigma \to M_0} \frac{1}{V_\sigma} \oiint_{\sigma_{ext}} \vec{F} \times d\vec{\sigma}.$$

Если в некоторой области G имеем $rot\vec{a} = 0$, то векторное поле $\vec{a}$ в области G называется *безвихревым*.

Основные свойства ротора:

1. $rot(\vec{F}_1 + \vec{F}_2) = rot\vec{F}_1 + rot\vec{F}_2$.
2. $rot(c\vec{F}) = c \cdot rot\vec{F}$.
3. $rot(u \cdot \vec{F}) = gradu \times \vec{F} - u \cdot rot\vec{F}$.

В криволинейных координатах ротор выражается следующим образом:

$$rot\vec{a} = \begin{vmatrix} \frac{1}{H_2H_3}\vec{e}_1 & \frac{1}{H_1H_3}\vec{e}_2 & \frac{1}{H_1H_2}\vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ a_1H_1 & a_2H_2 & a_3H_3 \end{vmatrix},$$

где $H_i = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2}$, i=1,2,3 – коэффициенты Ламэ данной криволинейной системы координат; q_1=const, q_2=const, q_3=const - координатные поверхности системы криволинейных координат.

В частности, в цилиндрических координатах ($q_1=\rho$, $q_2=\varphi$, $q_3=z$):

$$rot\vec{a} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\rho}\vec{e}_\rho & \vec{e}_\varphi & \frac{1}{\rho}\vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_1 & \rho a_2 & a_3 \end{vmatrix}.$$

В сферических координатах ($q_1=r$, $q_2=\theta$, $q_3=\varphi$):

$$rot\vec{a} = \begin{vmatrix} \frac{1}{r^2 \sin\theta}\vec{e}_r & \frac{1}{r\sin\theta}\vec{e}_\theta & \frac{1}{r}\vec{e}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ a_1 & ra_2 & r\sin\theta a_3 \end{vmatrix}.$$

<u>Теорема Стокса</u>: циркуляция вектора $\vec{a}$ по замкнутому контуру L равна потоку ротора вектора через любую поверхность σ, натянутую на контур L:

$$\oint_L (\vec{a}, d\vec{r}) = \iint_\sigma (rot\vec{a}, \vec{n}^0) d\sigma.$$

Векторное поле $\vec{a}(M) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$, заданное в пространственной области V, называется *потенциальным*, если существует такая скалярная функция φ(M), что во всех точках области V выполняется равенство $\vec{a}(M) = grad\varphi(M)$.

Теорема: для того, чтобы векторное поле $\vec{a}$, заданное в односвязной области V, было потенциально, необходимо и достаточно, чтобы в каждой точке области V выполнялось условие $rot\vec{a} = 0$.

Пример.

Задание: вычислить ротор поля $\vec{a} = \rho^2\vec{e}_\rho + \varphi \sin\rho\vec{e}_\varphi + z^3\vec{e}_z$ и определить, потенциально ли поле.

Решение: написание программы начинаем с команды «*with(VectorCalculus);*». Данная библиотека позволяет производить вычисления с векторами.

В начале необходимо задать систему координат, в которой записано поле. В данном случае это поле цилиндрическое. В Maple это запишется следующим образом:

SetCoordinates('cylindrical'[rho,phi,z]);

где в квадратных скобках задаются координатные поверхности данной системы координат.

Для задания векторного поля в данной библиотеке можно воспользоваться следующей строкой

*«F:=VectorField(<rho^2,phi*sin(rho),z^3>);»*

В фигурных скобках через запятую задаются коэффициенты при базисных векторах в записи векторного поля.

Для вычисления ротора есть функция «Curl(F);»; в скобках указывается наименование поля.

$$\frac{\phi \sin(\rho) + \rho\,\phi\cos(\rho)}{\rho}\,\bar{\mathbf{e}}_{\mathbf{z}}$$

Задания для самостоятельного решения.

Задание: для следующих векторных полей вычислить ротор и определить, является ли поле потенциальным. Построить векторные линии векторного поля.

Вариант №1. $\vec{a} = (x+z)\vec{i} + (y+z)\vec{j} + (x^2+z)\vec{k}$.

Вариант №2. $\vec{a} = (x^2+y^2)\vec{i} + (y^2+z^2)\vec{j} + (z^2+x^2)\vec{k}$.

Вариант №3. $\vec{a} = \frac{1}{2}(-y^2\vec{i} + x^2\vec{j})$.

Вариант №4. $\vec{a} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$.

Вариант №5. $\vec{a} = z^3\vec{i} + y^3\vec{j} + x^3\vec{k}$.

Вариант №6. $\vec{a} = \left(\frac{z}{x^2} + \frac{1}{y}\right)\vec{i} + \left(\frac{x}{y^2} + \frac{1}{z}\right)\vec{j} + \left(\frac{y}{z^2} + \frac{1}{x}\right)\vec{k}$.

Вариант №7. $\vec{a} = \ln(1+z^2)\vec{i} + \ln(1+x^2)\vec{j} + xz\vec{k}$.

Вариант №8. $\vec{a} = yz\cos xy\vec{i} + xz\cos xy\vec{j} + \sin xy\vec{k}$.

Вариант №9. $\vec{a} = \frac{1}{3}(x^3\vec{i} + y^3\vec{j} + xz^3\vec{k})$.

Вариант №10. $\vec{a} = (2xy+z^2)\vec{i} + (2yz+x^2)\vec{j} + (2xz+y^2)\vec{k}$.

Контрольные вопросы.

1. Дайте определение ротора векторного поля.
2. Как он обозначается?
3. Запишите формулу ротора как объемной производной.
4. Запишите основные свойства ротора.

5. Какое поле называется безвихревым?
6. Какие формулы верны для вычисления ротора в криволинейных координатах?
7. Какое поле называется потенциальным?
8. Какое условие должно выполняться, что векторное поле, заданное в односвязной области было потенциальным?
9. Чему равны коэффициенты Ламэ?
10. Какие величины являются осями сферической и цилиндрической системы координат?
11. Какой библиотекой необходимо пользоваться в Maple для вычисления в векторах?
12. Как задать координаты векторного поля в данной библиотеке?
13. Какая функция вычисляет ротор векторного поля?

Тема 13: Дифференциальные операторы.

Пусть векторное поле $\vec{a}(M) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R_1(x,y,z)\vec{k}$ [1] является соленоидальным в области G.

Векторным потенциалом векторного поля [1] называется вектор $\vec{b}(M) = P_1(x,y,z)\vec{i} + Q_1(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$ [2], удовлетворяющий в области G условию $rot\vec{b}(M) = \vec{a}(M)$ или в координатной форме

$$\frac{\partial R_1}{\partial y} - \frac{\partial Q_1}{\partial z} = P,\ \frac{\partial P_1}{\partial z} - \frac{\partial R_1}{\partial x} = Q,\ \frac{\partial Q_1}{\partial x} - \frac{\partial P_1}{\partial y} = R.$$

Два векторных потенциала соленоидального поля $\vec{a} = \vec{a}(M)$ отличаются друг от друга на градиент скалярного поля.

В Maple векторный потенциал можно вычислить по формулам [11; 107]:

$$P_1 \equiv 0$$

$$Q_1 = \int R(x,y,z)d \qquad [3].$$

$$R_1 = \int\left[\frac{\partial}{\partial y}\int Q(x,y,zx)dx + \frac{\partial}{\partial z}\int R(x,y,z)dx + P(x,y,z)\right]dy - \int Q(x,y,z)dx$$

Для соленоидального векторного поля $\vec{F}(x,y,z) = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$ векторный потенциал в декартовых координатах равен:

$$\vec{b}(M) = \int_0^1 \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ F_x(tx,ty,tz) & F_y(tx,ty,tz) & F_z(tx,ty,tz) \\ x & y & z \end{vmatrix} \cdot tdt$$

Скалярное поле $u(M)$ называется *скалярным потенциалом* векторного поля $\vec{F}(M)$, если $\vec{F}(M) = gradu(M)$.

Пример.

<u>Задание</u>: вычислить скалярный и векторный потенциалы векторного поля.

<u>Решение</u>: написание программы начинаем со слова *restart*.

Для вычисления скалярного потенциала воспользуемся формулой [1]. Для начала надо задать параметрические уравнения *phi:=x*t; psi:=y*t; theta:=z*t;*

Задайте коэффициенты при базисных переменных в уравнении поля:

*Fx:=(x,y,z)->8*x;*
*Fy:=(x,y,z)->11*y;*
*Fz:=(x,y,z)->7*z;*

Полученные данные подставить в уравнение [1]:

*int(Fx(phi,psi,theta)*diff(phi,t)+Fy(phi,psi,theta)*diff(psi,t)+Fz(phi,psi,theta)*diff(theta,t),t=0..1);*

Результатом вычислений будет скалярный потенциал векторного поля:

$$4\,x^2+\frac{11\,y^2}{2}+\frac{7\,z^2}{2}$$

Чтобы удостовериться в этом, найдите градиент полученного выражения, в результате чего получится уравнение исходного векторного поля.

Векторный потенциал векторного поля вычисляется в Maple по формулам [3].

Для начала надо ввести коэффициенты при базисных переменных в уравнении поля:

*Fx:=(x,y,z)->8*x;*
*Fy:=(x,y,z)->11*y;*
*Fz:=(x,y,z)->7*z;*

Далее по формулам [3] вычисляем новые функции $P_1(x,y,z)$, $Q_1(x,y,z)$, $R_1(x,y,z)$:

P1:=0:
Q1:=int(R,x);

А $R_1(x,y,z)$ придется вычислять по частям:

A:=diff(int(Q,x),y);
B:=diff(int(R,x),z);
C:=int(A+B+P,y);
E:=int(Q,x);
R1:=C-E;

Тогда векторный потенциал запишется по формуле [2]:

b:=P1*i+Q1*j+R1*k;

Чтобы проверить, является ли полученное выражение векторным потенциалом векторного поля, необходимо найти его ротор и проверить, равен ли он векторному полю.

Задания для самостоятельного решения.

Задание: для следующих векторных полей вычислить скалярный и векторный потенциалы.

Вариант №1. $\vec{a}=2y\vec{i}-z\vec{j}+2x\vec{k}$.

Вариант №2. $\vec{a}=(e^x-e^y)\vec{k}$.

Вариант №3. $\vec{a}=6y^2\vec{i}+6z\vec{j}+6x\vec{k}$.

Вариант №4. $\vec{a}=ye^x\vec{i}+2yz\vec{j}-(2xyze^{x^2}+z^2)\vec{k}$.

Вариант №5. $\vec{a}=2y\vec{i}-z\vec{j}+2x\vec{k}$.

Вариант №6. $\vec{a}=\vec{i}$.

Вариант №7. $\vec{a}=6x\vec{i}-15y\vec{j}+9z\vec{k}$.

Вариант №8. $\vec{a}=5x^2y\vec{i}-10xyz\vec{k}$.

Вариант №9. $\vec{a}=2\cos xz\vec{j}$.

Вариант №10. $\vec{a}=\dfrac{-y\vec{i}+x\vec{j}}{x^2+y^2}$, $x^2+y^2>0$.

Контрольные вопросы.

1. Что такое векторный потенциал векторного поля?
2. Что такое скалярный потенциал векторного поля?
3. Какому условию удовлетворяет векторный потенциал?
4. Как задается функция в Maple?

6.2 Внеаудиторная самостоятельная работа

Самостоятельная работа студентов по изучению дисциплины «Векторный анализ и элементы теории поля» предусматривает следующие виды деятельности студентов:

- Изучение теоретического материала по конспектам лекций и рекомендованным литературных источникам (отчетность – экзамен в конце семестра).
- Решение домашних заданий с целью подготовки к контрольным работам (отчетность – внеаудиторные контрольные работы).
- Выполнение индивидуальных расчетно-графических заданий (отчетность – защита выполненных РГЗ, но не более двух РГЗ за семестр).

Контроль самостоятельной работы осуществляется по графику:

- Контроль за выполнением домашних заданий;
- Экспресс-опросы;
- Математические диктанты;
- Домашние контрольные работы;
- Защита расчетно-графического задания через три недели после выдачи индивидуальных вариантов задания;

№ п/п	Наименование раздела	Наименование темы	Вид СР	Трудоемкость (час.)
1.	Векторный анализ и элементы теории поля	Векторная функция скалярного аргумента	Проработка лекций; чтение обязательной и дополнительной литературы, самоконтроль выполненных заданий	10
2.		Производная векторной функции скалярного аргумента	Проработка лекций; чтение обязательной и дополнительной литературы, самоконтроль выполненных заданий	10
3.		Интегрирование векторной функции скалярного аргумента	Проработка лекций; чтение обязательной и дополнительной литературы, самоконтроль выполненных заданий, написание конспекта	10
4.		Скалярные поля	Проработка лекций; чтение обязательной и дополнительной литературы, самоконтроль выполненных заданий	10
5.		Векторные поля	Проработка лекций; чтение обязательной и дополнительной литературы, самоконтроль выполненных заданий	10

6.		Поток вектороного поля	Проработка лекций; чтение обязательной и дополнительной литературы, самоконтроль выполненных заданий	10
7.		Дивергенция	Проработка лекций; чтение обязательной и дополнительной литературы, самоконтроль выполненных заданий	10
8.		Циркуляция векторного поля	Проработка лекций; чтение обязательной и дополнительной литературы, самоконтроль выполненных заданий	10
		Операторы Гамильтона и Лапласа	Проработка лекций; чтение обязательной и дополнительной литературы, самоконтроль выполненных заданий	10
9.		Подготовка к экзамену	Подготовка к экзамену	10

7. Перечень вопросов на экзамен

7. Примерная тематика курсовых работ

8. Перечень вопросов на дифференцированный зачет

1. Что называется полем?
2. Какое поле называется скалярным?
3. Как задается скалярное поле обычно и в декартовых координатах?
4. Что служит геометрической характеристикой скалярного поля?
5. Чем отличаются нестационарное и стационарное поля?
6. Что выполняет команда implicitplot3d?
7. Для чего необходима функция display?
8. Какое поле называется скалярным?
9. Какое поле называется плоским?
10. Что является геометрической характеристикой плоского поля?
11. Что выполняет команда implicitplot?
12. Какое поле называется сферическим?
13. Что является поверхностью уровня сферического поля?
14. Каким уравнением задается поле напряженности поля тяготения?
15. Что выполняет команда implicitplot3d?
16. Какое поле называется векторным?
17. Что такое векторные линии, векторные трубки?
18. Какими уравнениями в общем виде задаются векторные линии?
19. Чему равны коэффициенты Ламэ?
20. Вид уравнений векторных линий в криволинейных системах координат?
21. Что такое линейный интеграл векторного поля? Его уравнение в общем виде и в криволинейных координатах.
22. Что такое циркуляция векторного поля? Ее уравнение в общем виде и в криволинейных координатах.
23. Что выполняет команда implicitplot?

24. Дайте определение производной по направлению.
25. Как обозначается производная по направлению? По какой формуле она вычисляется?
26. По какой формуле вычисляется производная по направлению в декартовых координатах?
27. Дайте определение градиента скалярного поля.
28. Запишите его обозначение и вычисление (общее и в декартовых координатах).
29. Перечислите свойства градиента.
30. Чему равны коэффициенты Ламэ?
31. Какие величины являются осями сферической и цилиндрической системы координат?
32. Что выполняет команда implicitplot?
33. Для чего нужна функция gradplot?
34. Для чего служит функция eval?
35. Что обозначается знаком %?
36. Дайте определение дивергенции векторного поля.
37. Как она обозначается?
38. По какой формуле вычисляется поток векторного поля?
39. Если нормаль образует с координатными осями углы, то по какой формуле можно вычислять поток?
40. Запишите основные свойства потока.
41. Дайте определение дивергенции векторного поля.
42. Что такое стоки и источники?
43. По какой формуле вычисляется дивергенция? Какие формулы верны для вычисления дивергенции в криволинейных координатах?
44. Перечислите основные свойства дивергенции.
45. Какое поле называется соленоидальным?
46. Чему равны коэффициенты Ламэ?
47. Какие величины являются осями сферической и цилиндрической системы координат?
48. Дайте определение ротора векторного поля.
49. Как он обозначается?
50. Запишите формулу ротора как объемной производной.
51. Запишите основные свойства ротора.
52. Какое поле называется безвихревым?
53. Какие формулы верны для вычисления ротора в криволинейных координатах?
54. Какое поле называется потенциальным?
55. Какое условие должно выполняться, что векторное поле, заданное в односвязной области было потенциальным?
56. Чему равны коэффициенты Ламэ?
57. Какие величины являются осями сферической и цилиндрической системы координат?
58. Как задать координаты векторного поля в данной библиотеке?
59. Какая функция вычисляет ротор векторного поля?
60. Что такое векторный потенциал векторного поля?
61. Что такое скалярный потенциал векторного поля?
62. Какому условию удовлетворяет векторный потенциал?

9. Учебно-методическое и информационное обеспечение

9.1. Основная литература

1. Индивидуальные задания по высшей математике. Часть 3. Ряды. Кратные и криволинейные интегралы. Элементы теории поля : учебное пособие / А. П. Рябушко, В. В. Бархатов, В. В. Державец, И. Е. Юруть ; под редакцией А. П. Рябушко. — Минск : Вышэйшая школа, 2013. — 367 с. — ISBN 978-985-06-2222-8. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: http://www.iprbookshop.ru/20211.html (дата обращения: 03.04.2020). — Режим доступа: для авторизир. пользователей

2. Пастухов, Д. И. Элементы теории поля : учебное пособие / Д. И. Пастухов, Н. В. Кулиш. — Оренбург : Оренбургский государственный университет, ЭБС АСВ, 2016. — 92 с. — ISBN 978-5-7410-1533-9. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: http://www.iprbookshop.ru/69978.html (дата обращения: 06.02.2020). — Режим доступа: для авторизир. пользователей

3. Математика. Часть 8. Теория поля : учебное пособие / О. А. Кеда, Л. П. Мохрачева, Е. М. Пампура [и др.]. — Екатеринбург : Уральский федеральный университет, ЭБС АСВ, 2014. — 112 с. — ISBN 978-5-7996-1159-0. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: http://www.iprbookshop.ru/68439.html (дата обращения: 27.01.2020). — Режим доступа: для авторизир. пользователей

4. Мартынова, И. А. Введение в теорию поля и ее приложения : монография / И. А. Мартынова, И. Г. Машин, В. Н. Фомченко. — Саров : Российский федеральный ядерный центр – ВНИИЭФ, 2014. — 108 с. — ISBN 978-5-9515-0262-9. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: http://www.iprbookshop.ru/60840.html (дата обращения: 18.12.2019). — Режим доступа: для авторизир. пользователей

5. Борчердс, Р. Е. Квантовая теория поля / Р. Е. Борчердс ; перевод А. Я. Мальцев. — Москва, Ижевск : Регулярная и хаотическая динамика, Ижевский институт компьютерных исследований, 2006. — 96 с. — ISBN 978-5-93972-627-6. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: http://www.iprbookshop.ru/16540.html (дата обращения: 07.02.2020). — Режим доступа: для авторизир. пользователей

6. Тюрин, А. Н. Квантование, классическая и квантовая теории поля и тэта-функции / А. Н. Тюрин ; перевод А. Н. Тюрин ; под редакцией А. Л. Городенцев. — Москва, Ижевск : Регулярная и хаотическая динамика, Ижевский институт компьютерных исследований, 2003. — 168 с. — ISBN 5-93972-284-9. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: http://www.iprbookshop.ru/16539.html (дата обращения: 07.02.2020). — Режим доступа: для авторизир. пользователей

9.2. Дополнительная литература:

1. Марчук, Н. Г. Уравнения теории поля и алгебры Клиффорда / Н. Г. Марчук. — Москва, Ижевск : Регулярная и хаотическая динамика, 2009. — 304 c. — ISBN 978-5-93972-761-7. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: http://www.iprbookshop.ru/16648.html (дата обращения: 01.01.2020). — Режим доступа: для авторизир. пользователей

2. Борчердс, Р. Е. Квантовая теория поля / Р. Е. Борчердс ; перевод А. Я. Мальцев. — Москва, Ижевск : Регулярная и хаотическая динамика, Ижевский институт компьютерных исследований, 2006. — 96 c. — ISBN 978-5-93972-627-6. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: http://www.iprbookshop.ru/16540.html (дата обращения: 07.02.2020). — Режим доступа: для авторизир. пользователей

3. Высшая математика. Том 4. Дифференциальные уравнения. Ряды. Ряды Фурье и преобразование Фурье. Дифференциальное и интегральное исчисление функций нескольких переменных. Теория поля : учебник / А. П. Господариков, М. А. Зацепин, Г. А. Колтон [и др.] ; под редакцией А. П. Господариков. — Санкт-Петербург : Национальный минерально-сырьевой университет «Горный», 2015. — 213 c. — ISBN 978-5-94211-713-9. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: http://www.iprbookshop.ru/71690.html (дата обращения: 04.04.2020). — Режим доступа: для авторизир. пользователей

4. Марчук, Н. Г. Уравнения теории поля и алгебры Клиффорда / Н. Г. Марчук. — Москва, Ижевск : Регулярная и хаотическая динамика, 2009. — 304 c. — ISBN 978-5-93972-761-7. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: http://www.iprbookshop.ru/16648.html (дата обращения: 01.01.2020). — Режим доступа: для авторизир. пользователей

9.3. Ресурсы информационно-телекоммуникационной сети Интернет Программное обеспечение: электронная библиотека, локальная сеть КамГУ им. Витуса Беринга, учебные программы в электронном виде, электронные учебники, учебная обязательная и дополнительная литература.

10.Формы и критерии оценивания учебной деятельности студента

На основании разработанной компетентностной модели выпускника образовательные цели представлены в виде набора компетенций как планируемых результатов освоения образовательной программы. Определение уровня достижения планируемых результатов освоения образовательной программы осуществляется посредством оценки уровня сформированности компетенции и оценки уровня успеваемости обучающегося по пятибалльной системе («отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно», «зачтено», «не зачтено»).

Основными критериями оценки в зависимости от вида работы обучающегося являются: сформированность компетенций (знаний, умений и владений), степень владения профессиональной терминологией, логичность, обоснованность, четкость изложения материала, ориентирование в научной и специальной литературе.

Текущий контроль

Уровень освоения компетенции	**Уровень освоения дисциплины (оценка)**	**Форма текущего контроля**		
		Устный опрос (сообщение, доклад, реферат, домашняя работа и др.)	**Письменный опрос (решение (составление) задач, тестов, оформление проектов документов и пр.)**	**Лабораторная работа**
		Универсальные критерии оценивания		
Высокий	Отлично	Продемонстрированы глубокие знания программного материала, а также сформированность всех дескрипторов компетенции: знаний, умений, навыков. Ответы логически последовательны, содержательны. Стиль изложения научный. Применение умений и навыков уверенное.	Верно решено (выполнено) от 91 до 100 % заданий (задач)	Все задания выполнены верно, оформление работы соответствует требованиям, студентом дан четкий безошибочный ответ на все поставленные вопросы.
Базовый	Хорошо	Продемонстрированы глубокие знания программного материала, а также успешная сформированность дескрипторов компетенции: знаний, умений, навыков. Ответы логически последовательны, содержательны. Стиль изложения научный. Вместе с тем, студентом допущены ошибки, имеет место пробелы в умениях и навыках.	Верно решено (выполнено) от 76 до 90 % заданий (задач)	Все задания выполнены верно, оформление работы соответствует требованиям, студент ответил на поставленные вопросы с замечаниями.

Пороговый	Удовлетворительно	Продемонстрированы не достаточные знания программного материала, имеются затруднения в понимании сущности и взаимосвязи рассматриваемых процессов и явлений. Сформированы дескрипторы компетенции: знания, умения, навыки порогового уровня.	Верно решено (выполнено) от 50 до 75 % заданий (задач)	Все задания выполнены с замечаниями; оформление работы имеет замечания, студент ответил на поставленные вопросы с замечаниями
Компетенции не сформированы	Неудовлетворительно	Ответ фрагментарен, нелогичен. Студент не осознает связь обсуждаемого вопроса с другими вопросами дисциплины. Терминология не используется. Дескрипторы компетенции: знания, умения, навыки не сформированы (теоретические знания разрознены, умения и навыки отсутствуют) // Либо ответ на вопрос полностью отсутствует или студент отказывается от ответа.	Верно решено (выполнено) менее 50 % заданий (задач)	Задания выполнены неправильно (не выполнены), оформление работы имеет замечания, студент ответил на поставленные вопросы с ошибками или не ответил на поставленные вопросы.

Промежуточная аттестация

Уровень сформированности компетенции	**Уровень освоения дисциплины (оценка)**	**Форма промежуточной аттестации**			
		Зачет	**<u>Дифференцированный зачет</u>**	**Экзамен**	**Защита курсовой работы**
		Универсальные критерии оценивания			

Высокий	зачтено // отлично	Продемонстрированы глубокие знания программного материала, а также сформированность всех дескрипторов компетенции: знаний, умений, навыков. Ответы логически последовательны, содержательны. Стиль изложения научный. Применение умений и навыков уверенное.	Продемонстрировано всестороннее и глубокое освещение избранной темы (проблематики), а также умение работать с источниками, делать теоретические и практические выводы. Ответ логически последователен, содержателен. Стиль изложения научный с использованием терминологии.
Базовый	зачтено // хорошо	Продемонстрированы глубокие знания программного материала, а также успешная сформированность дескрипторов компетенции: знаний, умений, навыков. Ответы логически последовательны, содержательны. Стиль изложения научный. Вместе с тем, студентом допущены ошибки, имеет место пробелы в умениях и навыках.	Продемонстрировано глубокое освещение избранной темы (проблематики), а также умение работать с источниками, делать теоретические и практические выводы. Ответ логически последователен, содержателен. Стиль изложения научный с использованием терминологии. Вместе с тем, студентом допущены ошибки.
Пороговый	зачтено // удовлетворительно	Продемонстрированы не достаточные знания программного материала, имеются затруднения в понимании сущности и взаимосвязи рассматриваемых процессов и явлений. Сформированы дескрипторы компетенции: знания, умения, навыки порогового уровня.	Продемонстрировано в основном владение материалом, а также умение работать с источниками, делать выводы. Вместе с тем, недостаточно четко отражены результаты исследования, студентом допущены ошибки.
Компетенции не сформированы	не зачтено // неудовлетворительно	Ответ фрагментарен, нелогичен. Студент не осознает связь обсуждаемого вопроса с другими вопросами дисциплины. Терминология не используется. Дескрипторы компетенции: знания, умения, навыки не сформированы (теоретические знания разрознены, умения и навыки отсутствуют) // Либо ответ на вопрос полностью отсутствует	Ответ фрагментарен, нелогичен. Студент не осознает связь обсуждаемого вопроса (проблематики исследования) с другими вопросами дисциплины. Терминология не используется. Теоретические знания разрознены, умения и навыки отсутствуют // Либо ответ на вопрос полностью отсутствует или студент отказывается от ответа.

		или студент отказывается от ответа.	

11. Материально-техническая база

Используемые инструментальные и программные средства. Программное обеспечение: библиотека, электронная библиотека, локальная сеть КамГУ им. Витуса Беринга, учебные специализированные аудитории с оборудованием. В рамках изучения дисциплины применяется доска, мультимедийный проектор для демонстрации презентаций и видеоматериалов.