Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Камчатский государственный университет имени Витуса Беринга»

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ (КУРСА, МОДУЛЯ)

Б1.О.12 Тензорный анализ

Направление подготовки (специальность): 01.03.02 Прикладная математика и информатика

Профиль подготовки: общий

Год набора: 2021

Квалификация выпускника: Бакалавр

Форма обучения: очная

Курс 1 Семестр 1, 2

экзамен 1, 2 семестр

Петропавловск-Камчатский 2021 г.

Рабочая программа составлена с учетом требований федерального государственного образовательного стандарта высшего образования по направлению подготовки 01.03.02 «Прикладная математика и информатика», утвержденного Приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 10.01.2018 № 9.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Цель и задачи освоения дисциплины

Целью дисциплины является овладение фундаментальными знаниями, необходимые для изучения основных математических дисциплин, развитие способности использовать базовые знания алгебры и геометрии, основных фактов, концепций, принципов теорий, связанных с профессиональной деятельностью в сфере прикладной математики и информатики.

Задачи:

– изучение основных понятий тензорного анализа как самостоятельного раздела математики;
– рассмотрение современного развития тензорного анализа и его связи с другими областями математики;
– выработка системы представлений о методах тензорного анализа для решения ряда задач в своей профессиональной деятельности.

2. Место дисциплины в структуре ОП ВО

Б1.О.12 Цикл математических и естественнонаучных дисциплин (вариативная часть, дисциплины по выбору). Для изучения дисциплины достаточно курса школьной математики. Является одной из базовых предшествующих для всех последующих математических и прикладных дисциплин.

3. Планируемые результаты обучения по дисциплине

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих компетенций в соответствии с ФГОС ВО по данному направлению подготовки (специальности):

Наименование категории (группы) компетенций	Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
Теоретические и практические основы профессиональной деятельности	ОПК-3. Способен применять и модифицировать математические модели для решения задач в области профессиональной деятельности	ОПК-3.1. Знаетклассические математические модели, применяемые в различных областях человеческой деятельности. ОПК-3.2. Умеет модифицировать классические математические модели для решения конкретных задач профессиональной деятельности. ОПК-3.3. Имеет опыт применения методов математического

		моделирования для решения конкретных задач профессиональной деятельности.

4. Содержание дисциплины

Раздел 1. Комплексные числа. Понятие комплексного числа. Операции с комплексными числами. Невозможность линейного упорядочения системы комплексных чисел. Вложение системы действительных чисел в систему комплексных чисел. Операция сопряжения, ее связь с полевыми операциями. Алгебраическая форма комплексного числа. Комплексная плоскость. Модуль и аргумент комплексного числа. Тригонометрическая форма комплексного числа. Сложение и умножение комплексных чисел в тригонометрической форме. Формула Муавра. Извлечение корней из комплексных чисел.

Раздел 2. Алгебра матриц. Понятие матрицы. Специальные классы матриц. Сложение и вычитание матриц. Умножение матрицы на число. Сокращенная запись суммирования, правила оперирования с ней. Подстановки и перестановки множества индексов. Инверсии. Понятие определителя. Свойства определителей. Вычисление определителей. Теорема Лапласа. Умножение матриц, его свойства. Понятие обратной матрицы. Условие обратимости матрицы. Формула обратной матрицы. Блочные матрицы.

Раздел 3. Системы линейных уравнений. Системы линейных алгебраических уравнений. Однородные и неоднородные системы. Матричная запись систем линейных уравнений. Метод Крамера и матричный метод решения квадратных систем линейных уравнений. Миноры матрицы. Ранг матрицы. Линейная зависимость и независимость строк и столбцов матрицы. Базисный минор, базисные строки и столбцы. Преобразования матрицы, не меняющие ее ранг. Связь обратимости с рангом. Теорема Кронекера-Капелли. Решение произвольных линейных систем. Базисные (свободные) переменные. Фундаментальная система решений. Строение общего решения однородных и неоднородных линейных систем. Обобщённый метод Крамера. Методы Гаусса и Жордано-Гаусса решения систем линейных уравнений и обращения матриц.

Раздел 4. Векторная алгебра. Направленные отрезки и векторы. Сложение и вычитание векторов в геометрической форме. Умножение вектора на число. Свойства линейных операций. Коллинеарность и компланарность векторов. Линейно независимые системы векторов, их свойства. Базисы прямой, плоскости, пространства. Координаты векторов в базисе. Линейные операции в координатах. Коллинеарность и компланарность в координатах. Преобразования базисов плоскости и пространства. Матрица перехода. Скалярное, векторное и смешанное умножения векторов, их свойства. Ортогональные и ортонормированные базисы. Умножение векторов в ортонормированных базисах. Ортогональные матрицы. Обращение ортогональных матриц. Преобразование ортонормированных базисов. Геометрический смысл элементов матрицы перехода. Углы Эйлера.

Раздел 5. Системы координат на плоскости и в пространстве. Системы декартовых координат на плоскости и в пространстве и связанные с ними ортонормированные базисы. Радиус-вектор точки. Связь между координатами точек и векторов. Простейшие задачи в координатах. Деление отрезка в данном отношении. Преобразование систем декартовых координат. Полярные координаты, их связь с декартовыми. Цилиндрические и сферические координаты, их связь с декартовыми. Суть метода координат на плоскости и в пространстве. Уравнение линии на плоскости. Параметрические уравнения линии на плоскости. Уравнения поверхности и линии в пространстве. Параметрические уравнения линии и поверхности в пространстве. Алгебраические линии и поверхности. Типовые задачи аналитической геометрии.

Раздел 6. Прямая линия на плоскости. Специальные уравнения прямой на плоскости в векторной и координатной формах. Параметрические уравнения прямой на плоскости. Общее уравнение прямой. Нормальный и направляющий векторы прямой. Угол между прямыми, расстояние от точки до прямой. Симметрия относительно прямой и точки. Поворот относительно точки. Аффинные преобразования плоскости, их инварианты. Ортогональные преобразования плоскости, их инварианты.

Раздел 7. Линии второго порядка на плоскости. Эллипс, гипербола, парабола, их канонические уравнения и основные свойства. Параметрические уравнения эллипса и гиперболы. Директрисы эллипса и гиперболы. Полярные уравнения эллипса, гиперболы, параболы. Линии второго порядка как конические сечения. Касательные к эллипсу, гиперболе и параболе, их уравнения. Оптические свойства эллипса, гиперболы и параболы в геометрической и физической трактовке. Общее уравнение линии второго порядка. Центр линии. Упрощение уравнения линии второго порядка поворотом и переносом системы координат. Числовые инварианты линии второго порядка. Классификация линий второго порядка.

Раздел 8. Прямая и плоскость в пространстве. Специальные уравнения прямой и плоскости в пространстве в векторной и координатной формах. Параметрические уравнения прямой и плоскости в пространстве. Общие уравнения прямой и плоскости в пространстве. Нормальные вектор плоскости. Расстояние от точки до прямой и плоскости. Угол между двумя прямыми, двумя плоскостями, прямой и плоскостью. Расстояние между скрещивающимися прямыми. Симметрия пространства относительно точки, прямой, плоскости. Поворот пространства вокруг прямой. Аффинные и ортогональные преобразования пространства, их инварианты.

Раздел 9. Поверхности второго порядка. Поверхности вращения, их уравнения. Эллипсоид вращения, параболоид вращения, гиперболоиды вращения. Эллипсоид, одно- и двуполостный гиперболоиды, эллиптический параболоид, гиперболический параболоид. Получение гиперболического параболоида скольжением параболы по параболе. Конические поверхности, их уравнения. Конус второго порядка. Асимптотический конус гиперболоидов. Цилиндрические поверхности, их уравнения. Эллиптический, гиперболический, параболический цилиндры. Прямолинейные образующие поверхностей второго порядка. Семейства прямолинейных образующих однополостного гиперболоида и гиперболического параболоида.

Раздел 10. Группы, кольца, поля. Алгебраические операции. Бинарные операции. Свойства ассоциативности, коммутативности, дистрибутивности. Нейтральные элементы. Обратные элементы. Алгебры. Подалгебры и их пересечения. Изоморфизмы и гомоморфизмы алгебр. Группы и подгруппы. Циклические группы. Группы преобразований множеств. Изоморфизм групп. Теорема Кэли. Смежные классы по подгруппе. Нормальные подгруппы. Фактор-группы. Гомоморфизмы. Ядро гомоморфизма. Теорема о гомоморфизмах групп. Кольца и подкольца. Идеалы колец. Отношение сравнимости по идеалу. Сравнимость по модулю в кольце целых чисел. Фактор-кольца. Теорема о гомоморфизмах колец. Поля. Поля классов вычетов. Поле частных целостного кольца. Конечные поля.

Раздел 11. Линейные пространства. Аксиоматика и простейшие свойства линейных пространств. Линейные комбинации и линейные оболочки. Линейная независимость системы векторов, свойства линейно независимых систем. Ранг системы векторов. Базисы и размерность. Координаты. Подпространства. Параметрические и общие уравнения линейных подпространств. Сумма и пересечение подпространств, их размерности. Разложение пространства в прямую сумму подпространства и его ортогонального дополнения.

Ортогональное дополнение к подпространству. Прямая сумма подпространств. Изоморфизм линейных пространств. Преобразование базисов, матрица перехода. Линейные точечные пространства и их аксиоматика. k-мерные плоскости, прямые и гиперплоскости. Параметрические и общие уравнения k-мерных плоскостей. Геометрический смысл множества решений системы линейных уравнений. Взаимное расположение многомерных плоскостей, взаимное расположение гиперплоскостей. Пересечение и объединение плоскостей.

Раздел 12. Евклидовы и унитарные пространства. Евклидово пространство и его простейшие свойства. Норма вектора. Угол между векторами. Ортонормированные базисы. Существование ортонормированных базисов, процесс ортогонализации. Скалярное умножение в ортонормированных базисах. Матричная запись скалярного умножения. Преобразование ортонормированных базисов. Определитель Грамма системы векторов. Ортогональная проекция вектора на подпространство. Задача об аппроксимации вектора векторами данного подпространства. Унитарное пространство. Неравенство Коши-Буняковского, норма вектора. Ортонормированные базисы, их преобразование. Скалярное умножение в ортонормированных базисах. Изоморфизм евклидовых и унитарных пространств. Многомерные параллелепипеды. Геометрический смысл определителя Грамма системы векторов. Нормальное уравнение гиперплоскости. Расстояние от вектора до гиперплоскости.

Раздел 13. Линейные операторы. Определение линейного оператора. Линейные операции с операторами. Сопряженное пространство. Композиция линейных операторов. Обратимые операторы. Образ, ядро и ранг оператора. Матричная запись линейного оператора. Преобразование матрицы линейного оператора. Характеристический многочлен линейного оператора. Собственные значения и собственные векторы линейного оператора. Приведение матрицы оператора к диагональному виду. Жорданова нормальна форма матрицы. Самосопряженные операторы в евклидовом и унитарном пространствах. Собственные значения и собственные векторы самосопряженного оператора. Матрица самосопряженного оператора в ортонормированном базисе. Норма самосопряженного оператора. Унитарные и ортогональные операторы, их свойства.

Раздел 14. Билинейные и квадратичные формы. Билинейные формы, их матричная запись. Преобразование матрицы билинейной формы при изменении базиса. Ранг формы. Квадратичные формы. Привидение квадратичной формы к сумме квадратов методами Лагранжа и Якоби. Закон инерции. Классификация квадратичных форм. Критерий Сильвестра. Приведение квадратичной формы к сумме квадратов ортогональным преобразованием. Гиперповерхности второго порядка, центр гиперповерхности. Числовые инварианты гиперповерхностей второго порядка. Классификация гиперповерхностей второго порядка. Классификация поверхностей второго порядка в трехмерном пространстве.

Раздел 15. Многочлены. Деление с остатком. Наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное в кольцах. Неприводимые многочлены. Функциональное и формальное равенство многочленов.Корни многочленов. Формальное дифференцирование. Кратные корни. Формулы Виета. Симметрические многочлены. Основная теорема о симметрических многочленах. Алгебраическая замкнутость поля комплексных чисел. Разложение многочленов над полями действительных и комплексных чисел на неприводимые множители.

Раздел 16. Тензорное исчисление. Ковариантные и контравариантные векторы. Общее понятие о тензорах. Координаты тензора, переход от одной системы координат к другой, свертка тензора, симметрические и кососимметрические тензоры, операция симметрирования и альтернирования, поднятие и опускание индексов, внешнее умножение, ориентация пространства. Связность и ковариантное дифференцирование: ковариантная производная тензоров, параллельный перенос векторных полей, геодезические линии. Физические приложения тензоров. Тензор напряжений. Эллипсоид инерции. Тензор деформаций.

5. Тематическое планирование

1 семестр

№	Наименование модуля	Лекции	Практики/ семинары	Лабораторные	Сам. работа	Всего, часов
1	Тензорное исчисление	68	68	0	152	288
	Всего	68	68	0	152	288

Модуль 1

№ темы	Тема	Кол-во часов	Компетенции по теме
	Лекции		
1	Комплексные числа	2	ОПК-3
2	Алгебра матриц	4	ОПК-3
3	Системы линейных уравнений	6	ОПК-3
4	Векторная алгебра	4	ОПК-3
5	Системы координат на плоскости и в пространстве	4	ОПК-3
6	Прямая на плоскости	4	ОПК-3
7	Линии второго порядка	4	ОПК-3
8	Прямая и плоскость в пространстве	4	ОПК-3
9	Поверхности второго порядка	6	ОПК-3
10	Элементы общей алгебры	8	ОПК-3
11	Линейные пространства	4	ОПК-3
12	Евклидовы и унитарные пространства	4	ОПК-3
13	Линейные операторы	4	ОПК-3
14	Билинейные и квадратичные формы	6	ОПК-3
15	Алгебра многочленов	4	ОПК-3
	Практические занятия (семинары)		
1	Комплексные числа	2	ОПК-3
2	Алгебра матриц	4	ОПК-3
3	Системы линейных уравнений	6	ОПК-3

4	Векторная алгебра	6	ОПК-3
5	Системы координат на плоскости и в пространстве	2	ОПК-3
6	Прямая на плоскости	6	ОПК-3
7	Линии второго порядка	4	ОПК-3
8	Прямая и плоскость в пространстве	6	ОПК-3
9	Поверхности второго порядка	6	ОПК-3
10	Элементы общей алгебры	4	ОПК-3
11	Линейные пространства	4	ОПК-3
12	Евклидовы и унитарные пространства	4	ОПК-3
13	Линейные операторы	4	ОПК-3
14	Билинейные и квадратичные формы	4	ОПК-3
15	Алгебра многочленов	6	ОПК-3
	Самостоятельная работа		
1	Выполнение расчетно-графической работы по темам «Комплексные числа», «Алгебра матрица», «Системы линейных уравнений»	20	ОПК-3
2	Выполнение расчетно-графической работы по темам «Векторная алгебра», «Системы координат на плоскости и в пространстве»	20	ОПК-3
3	Выполнение расчетно-графической работы по темам «Прямая на плоскости», «Линии второго порядка»	20	ОПК-3
4	Выполнение расчетно-графической работы по темам «Прямая и плоскость в пространстве»	20	ОПК-3
5	Выполнение расчетно-графической работы по темам «Элементы общей алгебры»	16	ОПК-3
6	Выполнение расчетно-графической работы по темам «Линейные пространства», «Евклидовы и унитарные пространства»	16	ОПК-3
7	Выполнение расчетно-графической работы по темам «Линейные операторы», «Билинейные и квадратичные формы»	16	ОПК-3

8	Подготовка к экзамену	24	ОПК-3

2 семестр

№	Наименование модуля	Лекции	Практики/ семинары	Лабораторные	Сам. работа	Всего, часов
1	Тензорное исчисление	28	28	0	88	144
	Всего	28	28	0	88	144

Тематический план

№ темы	Тема	Кол-во часов	Компетенции по теме
	Лекции		
1	Понятие тензора.	2	ОПК-3
2	Тензорная алгебра.	2	ОПК-3
3	Символы Кронекера.	2	ОПК-3
4	Тензоры первой валентности	2	ОПК-3
5	Тензоры второй валентности	2	ОПК-3
6	Полилинейные формы.	2	ОПК-3
7	Диады.	2	ОПК-3
8	Анализ поверхностей.	2	ОПК-3
9	Деривационные формулы.	2	ОПК-3
10	Якобиан отображения.	2	ОПК-3
11	Контравариантные производные.	2	ОПК-3
12	Символы Кристоффеля.	2	ОПК-3
13	Ковариантные производные.	2	ОПК-3
14	Взаимные базисы.	2	ОПК-3
	Практические занятия (семинары)		
1	Понятие тензора.	2	ОПК-3
2	Тензорная алгебра.	2	ОПК-3
3	Взаимные базисы.	2	ОПК-3
4	Якобиан отображения.	2	ОПК-3
5	Символы Кронекера.	2	ОПК-3

6	Ковариантные и контравариантные производные.	2	ОПК-3
7	Ковариантные и контравариантные производные.	2	ОПК-3
8	Полилинейные формы.	2	ОПК-3
9	Геометрия поверхности.	2	ОПК-3
10	Диады.	2	ОПК-3
11	Анализ поверхностей.	4	ОПК-3
12	Символы Кристоффеля.	4	ОПК-3
	Самостоятельная работа		
1	Понятие тензора.	10	ОПК-3
2	Символы Кронекера.	10	ОПК-3
3	Ковариантные тензоры	12	ОПК-3
4	Контравариантные тензоры.	12	ОПК-3
5	Взаимные базисы.	12	ОПК-3
6	Якобиан отображения	14	ОПК-3
7	Подготовка к экзамену	18	ОПК-3

6. Самостоятельная работа
6.1. Планы семинарских (практических, лабораторных) занятий

1 семестр

Тема 1: Комплексные числа.

– задания для работы в аудитории:

1. Найти сумму, произведение, частное комплексных чисел $z_1 = -2+5i$ и $z_2 = 3-2i$.

2. Найти значение функции $f(z) = 6z+1$ в точке $z_0 = -1+i$.

3. Найти тригонометрическую форму комплексного числа $z = -3-3i$.

4. Расположить комплексные числа в порядке убывания их модулей:
A) $3-2i$; B) $-3+i$; C) $2+4i$; D) $-1-i$.

5. Чему равно число $(1+i)^7$?

6. Изобразить на комплексной плоскости множества точек, удовлетворяющих неравенствам:

а) $\begin{cases} 2 \le |z| \le 4, \\ \dfrac{3\pi}{4} < \arg z < \pi; \end{cases}$ б) $\operatorname{Re} z > 2$; в) $1 < \operatorname{Im} z \le 2$.

– задания для самостоятельной работы:

1. Найти сумму, произведение, частное комплексных чисел $z_1 = -1-2i$ и $z_2 = 5+i$.

2. Найти значение функции $f(z) = 3-2z$ в точке $z_0 = 3-2i$.

3. Найти тригонометрическую форму комплексного числа $z = \sqrt{3}-i$.

4. Расположить комплексные числа в порядке возрастания их модулей:
A) $2+2i$; B) $3-4i$; C) $-1+i$; D) $1-7i$.

5. Чему равно число $(-1+i)^7$.

6. Изобразить на комплексной плоскости множества точек, удовлетворяющих неравенствам:

а) $\begin{cases} |z| \le 1, \\ \frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{3\pi}{4}; \end{cases}$ б) $1 < \operatorname{Re} z < 2$; в) $\operatorname{Im} z = \frac{\pi}{3}$.

Тема 2: Алгебра матриц (2 пары).

– задания для работы в аудитории:

1. Чему равен определитель
   a. $\Delta = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -4 \end{vmatrix}$;
   b. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$;
   c. $\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 6 & 1 \\ 4 & -1 & 8 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$;
   d. $\Delta = \begin{vmatrix} 18 & 9 & 27 \\ 6 & 12 & 12 \\ 13 & 26 & 39 \end{vmatrix}$;
   e. $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 7 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & 4 & 0 \\ 5 & 5 & -3 & 2 \\ 2 & 6 & -5 & 3 \end{vmatrix}$;
   f. $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix}$

.

2. Если A $= \begin{pmatrix} 4 & 0 & -12 \\ 6 & -1 & 2 \\ 2 & -6 & 10 \end{pmatrix}$, B $= \begin{pmatrix} 2 & 8 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, то матрица $2A+4B$ имеет вид?

3. Если A $= \begin{pmatrix} -1 & 8 & 4 \\ -5 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$, B $= \begin{pmatrix} 7 & -3 & 9 \\ 0 & 1 & 4 \\ 11 & -2 & 10 \end{pmatrix}$, то матрица $3A–6B$ имеет вид?

4. Если A $= \begin{pmatrix} -7 & 0 & 5 \\ -2 & -21 & 3 \\ 18 & 6 & -1 \end{pmatrix}$, B $= \begin{pmatrix} 20 & -3 & 1 \\ 0 & 16 & 10 \\ 13 & -2 & 8 \end{pmatrix}$, то матрица $A \cdot B$ имеет вид?

5. Если A $= \begin{pmatrix} -13 & 4 \\ 0 & 7 \\ 10 & -6 \end{pmatrix}$, B $= \begin{pmatrix} 2 & 10 & -7 \\ -6 & -12 & 8 \end{pmatrix}$, то матрица $A \cdot B$ имеет вид?

6. Чему равен ранг матрицы A $= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 12 & -2 & 1 \\ 0 & -5 & 4 \end{pmatrix}$?

7. Если A $= \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 7 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$, то матрица A^{-1} имеет вид?

– задания для самостоятельной работы:

1. Чему равен определитель:

a. $\Delta = \begin{vmatrix} 27 & 6 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$;

b. $\Delta = \begin{vmatrix} -7 & -3 \\ 12 & 4 \end{vmatrix}$;

c. $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$;

d. $\Delta = \begin{vmatrix} -3 & 0 & 1 \\ -5 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 7 \end{vmatrix}$;

e. $\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$;

f. $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 5 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 6 & 3 \\ 1 & 5 & -1 & 2 \end{vmatrix}$

.

2. Если $A = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 2 \\ 7 & 4 & 1 \\ 8 & 0 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & -6 & 2 \end{pmatrix}$, то матрица $A+2B$ имеет вид?

3. Если $A = \begin{pmatrix} 5 & -8 & -11 \\ 3 & 4 & 1 \\ 15 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 10 & -3 \\ -1 & 0 & 5 \\ 6 & 9 & -5 \end{pmatrix}$, то матрица $2A-3B$ имеет вид?

4. Если $A = \begin{pmatrix} -1 & 6 & 10 \\ 4 & 0 & 5 \\ -8 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & 7 & 12 \\ -5 & 10 & 6 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$, то матрица $A \cdot B$ имеет вид?

5. Если $A = \begin{pmatrix} -9 & 1 \\ 0 & 61 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 12 & -6 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$, то матрица $A \cdot B$ имеет вид?

6. Чему равен ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

7. Если $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$, то матрица A^{-1} имеет вид?

Тема 3: Системы линейных уравнений (3 пары).

– задания для работы в аудитории:

1. Решить систему методом Крамера, обратной матрицы и Гаусса $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ 2x_1 - x_2 - 6x_3 = -1, \\ 3x_1 - 2x_2 = 8. \end{cases}$

2. Решить систему методом Крамера, обратной матрицы и Гаусса $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 3, \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 = -8, \\ 2x_2 + 7x_3 = 17. \end{cases}$

3. Решить систему методом Крамера, обратной матрицы и Гаусса $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 20, \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 6. \end{cases}$

4. Решить систему методом Крамера, обратной матрицы и Гаусса $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 2, \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 3. \end{cases}$

5. Решить систему методом Крамера, обратной матрицы и Гаусса $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 9, \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 4, \\ 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 18. \end{cases}$

6. Решить систему методом Гаусса $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 8, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -8. \end{cases}$, то сумма $3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4$ равна:

– задания для самостоятельной работы:

1. Решить систему методом Крамера, обратной матрицы и Гаусса $\begin{cases} 3x_1 - x_2 = 5, \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 15. \end{cases}$

2. Решить систему методом Крамера, обратной матрицы и Гаусса $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11. \end{cases}$

3. Решить систему методом Крамера, обратной матрицы и Гаусса $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 31, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 20, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 9. \end{cases}$

4. Решить систему методом Крамера, обратной матрицы и Гаусса $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 6x_3 = -15, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = -2, \\ -x_1 + 3x_3 = 7. \end{cases}$

5. Решить систему методом Крамера, обратной матрицы и Гаусса $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11. \end{cases}$

6. Решить систему методом Крамера, обратной матрицы и Гаусса $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 31, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 29, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 10. \end{cases}$

Тема 4: Векторная алгебра (3 пары).

– задания для работы в аудитории:

1. Выяснить длину медиан треугольника, зная координаты его вершин: A(3; –2), B(5; 2) и C(–1; 4).

2. Найти середины сторон треугольника ABC, если A(3; 7), B(5; 2) и C(–1; 0).

3. Зная, что векторы $\bar{a}(\alpha; 5; -1)$ и $\bar{b} = 3\bar{\imath} + \bar{\jmath} + \beta\bar{k}$ коллинеарны, вычислить α и β.

4. Найти вектор $\bar{a}$, зная две его координаты: $x = 3, y = -9$ и модуль $|\bar{a}| = 12$.

5. Вычислить объем параллелепипеда, построенного на трех данных векторах $\bar{a}(3; 1; -2)$, $\bar{b}(-4; 0; 3)$, $\bar{c}(1; 5; -1)$.

6. Найти длину вектора $\bar{a} = 20$ \{$\bar{\imath} + 30$ \{$\bar{\jmath} - 60$ \{$\bar{k}$.

7. Найти вектор $\overline{\mathrm{AB}}$ и его длину, если A(1; 3; 2) и B(5; 8; –1).

8. Найти длину вектора $\overline{\mathrm{AB}}$, если A(1; 2; 3), B(3; –4; 6).

9. Найти скалярное произведение векторов:

1) $\bar{a} = 3\bar{\imath} + 4\bar{\jmath} + 7\bar{k}$, $\bar{b} = 2\bar{\imath} - 5\bar{\jmath} + 2\bar{k}$;

2) $\bar{a}(2; 3; -4)$ и $\bar{b}(1; 1; 1)$.

10. Найти угол между векторами:

1) $\bar{a}(1; 2; 3)$, $\bar{b}(6; 4; -2)$.

2) $\bar{a}(1; 1; 0)$, $\bar{b}(0; 1; 1)$.

11. При каком значении α векторы $\bar{a}(\alpha; 3; 4)$ и $\bar{b} = 4\bar{\imath} + \alpha\bar{\jmath} - 7\bar{k}$ перпендикулярны?

12. Даны векторы $\bar{a}(2; 3; 0)$, $\bar{b}(-1; 2; 2)$, $\bar{c}(3; 1; 0)$. Найти координаты векторов: 1) $\bar{a} + \bar{b}$; 2) $\bar{a} + \bar{c}$; 3) $3\bar{a}$; 4) $\bar{a} + \bar{b} - \bar{c}$.

13. Определить, коллинеарны ли векторы:

1) $\bar{a}(1; -1; 2)$ и $\bar{b}(2; 2; -4)$;

2) $\bar{a}(2; 3; -1)$ и $\bar{b}(-4; -6; 2)$;

3) $\overline{\mathrm{AB}}$ и $\overline{\mathrm{CD}}$, если $A(-2; 3; 1)$, $B(1; 5; -2)$, $C(4; 5; -8)$, $D(1; 3; -5)$.

14. Даны векторы $\bar{a}(2; 2; 1)$ и $\bar{b}(6; 3; 2)$. Найти:

1) $\text{пр}_{\bar{a}}\bar{b}$:

2) $\text{пр}_{\bar{b}}\bar{a}$.

15. Найти векторные произведение векторов $\bar{a}(2; 3; 5)$ и $\bar{b}(1; 2; 1)$.

16. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a} = 6\bar{\imath} + 3\bar{\jmath} - 2\bar{k}$ и $\bar{b} = 3\bar{\imath} - 2\bar{\jmath} + 6\bar{k}$.

17. Вычислить площадь треугольника ABC, где $A(4;3;2)$, $B(1;1;1)$, $C(2;3;4)$.

18. Найти смешанное произведение векторов $\bar{a}(1; 1; 4)$, $\bar{b}(2; -1; -1)$, $\bar{c}(1; 3; -1)$.

19. Определить, компланарны ли векторы:

1) $\bar{a}(1; 2; 2)$, $\bar{b}(2; 5; 7)$, $\bar{c}(1; 1; -1)$;

2) $\bar{a}(3; 3; 4)$, $\bar{b}(2; 1; 1)$, $\bar{c}(2; 3; 2)$.

20. Найти объем параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{a}(1; -2; 1)$, $\bar{b}(1; 0; -1)$, $\bar{c}(3; 2; 1)$.

21. Найти высоту A_1H параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, если $A(5; 1; -4)$, $B(1; 2; -1)$, $D(3; 3; -4)$, $A_1(2; 2; 2)$.

22. Найти объем пирамиды $ABCD$, если $A(2; 2; 2)$, $B(5; 1; -4)$, $C(3; 3; -4)$, $D(1; 2; -1)$.

23. Даны точки $A(-3;1; -2)$, $B(-7; -9;4)$. Вектор $-2\overline{AB}$ имеет координаты.

24. Даны векторы $\bar{a}(-3;-1;\alpha), \bar{b}(2;-8;1)$. $\bar{a} \perp \bar{b}$, если α равно.

25. Дан параллелограмм $ABCD$. Точка M делит диагональ DB так, что $DM = 4MB$. Вектор $\overline{AD} = \bar{a}$, $\overline{AM} = \bar{b}$. Вектор $\overline{DB}$ выражается через векторы $\bar{a}, \bar{b}$ следующим образом.

26. Даны векторы $\bar{a}(-4;12;6), \bar{b}(-10;-11;-4)$. Тогда $\cos\left(\widehat{\bar{a};\bar{b}}\right)$ равен.

27. Площадь параллелограмма $ABCD$ с вершинами $A(3;4;5)$, $B(-2; -3;6)$, $D(3; -6; -3)$ равна.

28. Даны точки $A(-4;6;3)$, $B(3; -5;1)$, $C(2;6; -4)$, $D(2;4; -5)$, тогда смешанное произведение векторов $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$ равно.

– задания для самостоятельной работы:

1. Даны точки $A(4; 6; -9)$, $B(-10; 5; 3)$. Вектор $5\overline{AB}$ имеет координаты.

2. Даны векторы $\bar{a}(-5;-15;\alpha), \bar{b}(3;-7;-10)$. $\bar{a} \perp \bar{b}$, если α равно.

3. Дан параллелограмм $ABCD$. Точка M делит отрезок DC так, что $MC = 2DM$. Вектор $\overline{AD} = \bar{a}, \overline{AM} = \bar{b}$. Вектор $\overline{DC}$ выражается через векторы $\bar{a}, \bar{b}$ следующим образом.

4. Даны векторы $\bar{a}(8;-4;1), \bar{b}(10;10;5)$. Тогда $\cos\left(\widehat{\bar{a};\bar{b}}\right)$ равен.

5. Площадь треугольника ABC с вершинами $A(3;4;5)$, $B(-2; -3;6)$, $C(3; -6; -3)$ равна.

6. Даны точки $A(-4;6;3)$, $B(3; -5;1)$, $C(2;6; -4)$, $D(2;4; -5)$, тогда смешанное произведение векторов $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$ равно.

Тема 5: Системы координат на плоскости и в пространстве.

1. задания для работы в аудитории: Найти какой-нибудь базис и размерность подпространства L пространства R_3, если L задано уравнением $x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$.
2. Доказать, что все симметрические матрицы третьего порядка образуют линейное подпространство всех квадратных матриц третьего порядка. Найти базис и размерность этого подпространства.
3. Найти координаты многочлена $P_3(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$ в базисе $1,\ (x-1),\ (x-1)^2,\ (x-1)^3$.
4. Линейный оператор A в базисе $(\mathrm{e}_1,\ \mathrm{e}_2,\ \mathrm{e}_3)$ имеет матрицу

$$\begin{Bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{Bmatrix}$$

Найти матрицу этого же оператора в базисе $(\mathrm{e}_1,\ \mathrm{e}_1+\mathrm{e}_2,\ \mathrm{e}_1+\mathrm{e}_2+\mathrm{e}_3)$.

5. Найти ядро и область значений оператора дифференцирования в пространстве многочленов, степени которых меньше или равны трем.

6. Пусть $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ — собственные векторы оператора A, относящиеся к различным собственным значениям. Доказать, что вектор $\mathbf{z} = \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y},\ \alpha \neq 0,\ \beta \neq 0$ не является собственным вектором оператора A.

7. Пусть $x = \{x_1,\ x_2,\ x_3\}$, $Ax = \{\alpha_1 x_1,\ \alpha_2 x_2,\ \alpha_3 x_3\}$. Будет ли оператор A самосопряженным?

8. Доказать, что если матрица оператора A — симметрическая в некотором базисе, то она является симметрической в любом базисе (базисы — ортонормированные).

– задания для самостоятельной работы: [1] тема 7.1 № 1-10 (чет)

Найти координаты вектора $\mathbf{x}$ в базисе $(\mathbf{e}_1',\ \mathbf{e}_2',\ \mathbf{e}_3')$, если он задан в базисе $(\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3)$.

1. $\begin{cases} \mathbf{e}_1' = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_2' = 2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}_3' = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \end{cases}$ $\mathbf{x} = \{6,\ -1,\ 3\}.$

2. $\begin{cases} \mathbf{e}_1' = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_2' = (3/2)\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}_3' = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \end{cases}$ $\mathbf{x} = \{1,\ 2,\ 4\}.$

3. $\begin{cases} \mathbf{e}_1' = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 4\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_2' = (4/3)\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}_3' = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \end{cases}$ $\mathbf{x} = \{1,\ 3,\ 6\}.$

4. $\begin{cases} \mathbf{e}_1' = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + (3/2)\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_2' = 3\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}_3' = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \end{cases}$ $\mathbf{x} = \{2,\ 4,\ 1\}.$

Тема 6: Прямая на плоскости (3 пары).

– задания для работы в аудитории:

1. Даны вершины треугольника ABC: $A(4;\ 6)$, $B(–4;\ 0)$ и $C(–1;\ –4)$. Составить уравнения:

1) трех его сторон;
2) медианы, проведенной из вершины C;
3) высоты, опущенной из вершины A на сторону BC.

2. Найти отрезки, отсекаемые на осях координат прямой:

1) $3x - 2y + 12 = 0$;
2) $5x + 2y + 20 = 0$;
3) $y = 4x - 2$.

3. Прямая AB пересекает ось Oy в точке C. Найти координаты точки C, если $A(–4;\ –1)$, $B(2;\ 3)$.

4. Написать уравнение прямой, которая образует с осью Ox угол $\pi 3$ и пересекает ось Oy в точке (0; –6).

5. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M(2;\ 3)$ и отсекающей на оси Ox отрезок $a = 5$.

6. Проверить, будут ли прямые $4x - 6y + 7 = 0$ и $20x - 30y - 11 = 0$ параллельны.

7. Проверить, будут ли прямые $3x - 5y + 7 = 0$ и $10x + 6y - 3 = 0$ перпендикулярны.

8. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $A(–2;\ –5)$ параллельно прямой $3x + 4y - 2 = 0$.

9. Написать уравнения медиан треугольника ABC: $A(2;\ 2)$, $B(–2;\ –8)$, $C(–6;\ –2)$.

10. Написать уравнение высоты CH треугольника ABC: $A(0;\ 1)$, $B(6;\ 5)$, $C(12;\ –1)$.

11. Найти угол между прямыми:

1) $2x - 3y + 10 = 0$ и $5x - y + 4 = 0$;
2) $y = 2x - 3$ и $y = 0{,}5x + 5$.

12. Найти расстояние от точки M до прямой a:

1) $a: 4x - 3y + 12 = 0$, $M(1;\ 2)$;
2) $a: 12x + 5y - 4 = 0$, $M(1;\ 1)$.

13. Найти длину высоты BH треугольника ABC: $A(4;\ –3)$, $B(–2;\ 6)$, $C(5;\ 4)$.

– задания для самостоятельной работы:

Дан треугольник ABC, где $A(4;4)$, $B(8;6)$, $C(10;2)$.

1. Длины сторон AB, BC, AC равны соответственно.

2. Уравнение прямой BC в отрезках имеет вид.

3. Уравнение прямой, проходящей через точку С, если ее угловой коэффициент $k = 3$, имеет вид.

4. Если M – середина AB, а N – середина BC, то уравнение средней линии MN имеет вид.

5. Уравнение прямой, проходящей через точку A параллельно прямой BC имеет вид.

6. Уравнение высоты CK треугольника имеет вид.

7. Угол между прямыми AB и AC равен.

8. Длина высоты CK равна.

Тема 7: Линии второго порядка (2 пары).

– задания для работы в аудитории:

1. Если большая полуось эллипса равна 5, а расстояние между фокусами равно 6, то малая полуось равна.

2. Полуоси эллипса $169x^2 + 25y^2 = 4225$ равны.

3. Если расстояние между директрисами эллипса в девять раз больше расстояния между фокусами, то эксцентриситет эллипса равен.

4. Полуоси эллипса $x^2 + 2y^2 + 8x - 4 = 0$ равны.

5. Если гипербола проходит через точку $M(6;\ 9)$, а асимптоты заданы уравнениями $y = \pm\frac{5}{3}x$, то ее действительная полуось равна

6. Абсцисса точки M гиперболы $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$, расстояние от которой до правого фокуса вдвое меньше, чем до левого, равна.

7. Мнимая полуось гиперболы, имеющей асимптоты $y = \pm 0,75x$ и директрисы $x = \pm 3,2$, равна.

8. Полуоси гиперболы $9x^2 - 25y^2 - 18x - 100y - 316 = 0$ равны.

9. Если парабола симметрична относительно оси Oy, фокус находится в точке (0; 2) и вершина совпадает с началом координат, то уравнение параболы имеет вид.

10. Фокальный радиус-вектор точки M, лежащей на параболе $y^2 = 8x$, равен 20. Абсцисса точки M равна.

11. Координатами вершины параболы $y^2 + 14y - 6x + 49 = 0$ будут.

– задания для самостоятельной работы:

1. Написать уравнение эллипса, если две его вершины находятся в точках $A_1(-8;\ 0)$, $A_2(8;\ 0)$, а фокусы в точках $F_1(-5;\ 0)$,$F_1(5;\ 0)$.

2. Найти эксцентриситет эллипса $4x^2 + 9y^2 = 180$.

3. Найти координаты фокусов гиперболы $\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{25} = 1$.

4. Фокусы находятся в точках (−4; 0), (4; 0), а вещественная полуось равна 3. Написать уравнение гиперболы.

5. Найти площадь треугольника, образованного асимптотами гиперболы $9x^2 - 4y^2 - 36 = 0$ и прямой $9x + 2y - 24 = 0$.

6. Написать уравнение параболы с вершиной в начале координат, если координаты фокуса равны (0; −5).

7. Написать уравнение параболы, имеющей вершину в начале координат, симметричной относительно оси Ox и проходящей через точку $M(4;\ -2)$.

8. Найти эксцентриситет гиперболы $16x^2 - 9y^2 - 64x - 54y - 161 = 0$.

9. Найти уравнение директрис кривой $5x^2 + 9y^2 - 30x + 18y + 9 = 0$.

Тема 8: Прямая и плоскость в пространстве (3 пары).

– задания для работы в аудитории:

1. Написать уравнение плоскости, проходящей через три точки:

1) $A(2;\ 2;\ 3)$, $B(1;\ 0;\ –1)$, $C(0;\ –3;\ 1)$;

2) $M(0;\ 0;\ 5)$, $N(0;\ 4;\ 0)$, $P(–2;\ 0;\ 0)$.

2. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M(2;\ 3;\ –1)$ параллельно плоскости $5x - 3y + 2z - 10 = 0$.

3. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $A(7;\ –4;\ 4)$ перпендикулярно отрезку AB ,если B(1; 3; –2).

4. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку A(2; 3; 5) и перпендикулярной вектору $\bar{a}(4;3;2)$.

5. Пирамида имеет вершины A(3; 5; 3), B(–2; 11; –5), C(1; –1; 4), D(0; 6; 4):

1) составить уравнение плоскости ABC;

2) вычислить высоту DH пирамиды.

6. Даны координаты вершин тетраэдра: A(4; 1; 2), B(0; 0; 2), C(3; 0; 5), D(1; 1; 0). Написать уравнения его граней.

7. Вычислить расстояние между плоскостями: $11x-2y-10z-45=0$ и $11x-2y-10z+15=0$.

8. Вычислить расстояние от точки A(3; 5; –8) до плоскости $6x-3y+2z-28=0$.

9. Составить уравнение плоскости, отсекающей отрезки a= –6, b= 3, c= 3 по осям координат Ox, Oy, Oz соответственно.

10. При каких значениях α и β плоскости $\alpha x+2y+3z=0$ и $3x-\beta y+\alpha z-1=0$ параллельны?

11. При каком значении m плоскости $5x+\mathrm{my}-2z+1=0$ и $\mathrm{mx}-2y+6z+3=0$ перпендикулярны?

12. Написать уравнение плоскости, проходящей через:

1) точку M(–6; 3; 4) перпендикулярно оси Oz;

2) точку A(–2; 3; 1) параллельно плоскости Oxy.

13. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку A(2; 3; –4) и параллельной векторам $\bar{m}(-3;2;-1)$ и $\bar{p}(0;3;1)$.

14. Найти острый угол между плоскостями:

1) $x+4y+1=0$ и $-4x+12y-3z+5=0$;

2) $4x-10y+z-2=0$ и $11x-8y-7z-15=0$.

– задания для самостоятельной работы:

Дан тетраэдр $ABCD$, где A(2; –4; 5), B(–1; –3; 4), C(5; 5; –1), D(1; –2; 2).

1. Уравнения плоскостей ABD и CDB соответственно имеют вид.

2. Уравнение плоскости, проходящей через точку B перпендикулярно вектору $\overline{n}(4;3;1)$, имеет вид.

3. Уравнение плоскости, проходящей через точку B параллельно векторам $\overline{AC}$ и $\overline{AD}$, имеет вид.

4. Уравнение плоскости, проходящей через точку A параллельно плоскости CDB, имеет вид.

5. Двугранный угол между плоскостями ABD и CDB равен.

6. Длина высоты AH тетраэдра равна.

Тема 9: Поверхности второго порядка (3 пары).

– задания для работы в аудитории:

1. Написать каноническое уравнение однополостного гиперболоида, если известно, что он пересекается с плоскостью Oyz по эллипсу, заданному уравнениями $\gamma_1\colon\begin{cases}\frac{z^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1\\ x=0\end{cases}$, и с плоскостью Oxy по гиперболе, заданной уравнениями $\gamma_2\colon\begin{cases}\frac{y^2}{1}-\frac{x^2}{9}=1\\ z=0\end{cases}$. Написать уравнения прямолинейных образующих, проходящих через точку A(6, 2, 2).

2. Написать каноническое уравнение эллиптического параболоида, если известно, что он пересекается с плоскостью Oxz по параболе, заданной уравнениями $\gamma_1: \begin{cases} z^2 = -18x \\ y = 0 \end{cases}$, и проходит через точку A(1, 2, 3).
3. Написать каноническое уравнение эллипсоида, если известно, что он пересекается с плоскостью Oyz по эллипсу, заданному уравнениями $\gamma_1: \begin{cases} z^2 + \frac{y^2}{4} = 1 \\ x = 0 \end{cases}$, и точка A($\sqrt{\frac{5}{2}}$, 1, $\frac{1}{2}$) принадлежит эллипсоиду.
4. Написать уравнение круговой конической поверхности, если известны вершина поверхности S(0, -2, -5), уравнение оси поверхности $d: \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+1}{4}$ и точка M (2, 4, 3) принадлежащая поверхности.
5. Написать каноническое уравнение двуполостного гиперболоида, если известно, что он пересекается с плоскостью Oyz по гиперболе, заданной уравнениями $\gamma_1: \begin{cases} \frac{z^2}{2} - \frac{y^2}{3} = -1 \\ x = 0 \end{cases}$ и проходит через точку A($2\sqrt{2}$, 3, 0).
6. Написать каноническое уравнение гиперболического параболоида, если известно, что он пересекается с плоскостью Oxy по параболе, заданной уравнениями $\gamma_1: \begin{cases} x^2 = 4y \\ z = 0 \end{cases}$, и с плоскостью Oxz по прямым, заданным уравнениями $\gamma_2: \begin{cases} 3x^2 - 2z^2 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$. Написать уравнения прямолинейных образующих, проходящих через точку A(2, 1, 0).
7. Написать каноническое уравнение эллипсоида, если известно, что он пересекается с плоскостью Oxy по эллипсу, заданному уравнениями $\gamma_1: \begin{cases} \frac{x^2}{7} + \frac{y^2}{4} = 1 \\ z = 0 \end{cases}$, и с плоскостью Oyz по окружности, заданной уравнениями $\gamma_2: \begin{cases} y^2 + z^2 = 4 \\ x = 0 \end{cases}$.
8. Написать уравнение круговой цилиндрической поверхности, если ось поверхности задана уравнением $d: \frac{x-3}{2} = \frac{y}{4} = \frac{z+2}{3}$ и радиус поверхности равен 3.
9. Написать каноническое уравнение однополостного гиперболоида, если известно, что он пересекается с плоскостью Oyz по гиперболе, заданной уравнениями $\gamma_1: \begin{cases} \frac{z^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1 \\ x = 0 \end{cases}$, и с плоскостью Oxy по гиперболе, заданной уравнениями $\gamma_2: \begin{cases} \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{3} = -1 \\ z = 0 \end{cases}$. Написать уравнения прямолинейных образующих, проходящих через точку A(0, $2\sqrt{3}$, 6).
10. Написать каноническое уравнение гиперболического параболоида, если известно, что он пересекается с плоскостью Oyz по параболе, заданной уравнениями $\gamma_1: \begin{cases} z^2 = -10y \\ x = 0 \end{cases}$, и с плоскостью Oxy по параболе, заданной уравнениями $\gamma_2: \begin{cases} x^2 = 8y \\ z = 0 \end{cases}$.
11. Написать каноническое уравнение эллипсоида, если известно, что он пересекается с плоскостью Oxz по эллипсу, заданному уравнениями $\gamma_1: \begin{cases} x^2 + \frac{z^2}{3} = 1 \\ y = 0 \end{cases}$, и вершина B(0, 2, 0) принадлежит эллипсоиду.
12. Написать уравнение круговой конической поверхности, если известны вершина поверхности S(-1, 2, 1), уравнение оси поверхности $d: \frac{x+3}{2} = \frac{y+1}{3} = z$ и образующие с осью поверхности составляют угол $\frac{\pi}{3}$.

13. Написать каноническое уравнение двуполостного гиперболоида, если известно, что он пересекается с плоскостью Oyz по гиперболе, заданной уравнениями $\gamma_1: \begin{cases} \frac{z^2}{1} - \frac{y^2}{4} = 1 \\ x = 0 \end{cases}$ и проходит через точку A($\sqrt{2}$, 0, $\sqrt{3}$).
14. Написать каноническое уравнение гиперболического параболоида, если известно, что он пересекается с плоскостью Oxz по параболе, заданной уравнениями $\gamma_1: \begin{cases} z^2 = 14x \\ y = 0 \end{cases}$, и с плоскостью Oyz по прямым, заданным уравнениями $\gamma_2: \begin{cases} 2z^2 - 7y^2 = 0 \\ x = 0 \end{cases}$. Написать уравнения прямолинейных образующих, проходящих через точку A($\frac{1}{14}$, 0, 1).
15. Написать каноническое уравнение эллипсоида, если известно, что он пересекается с плоскостью Oyz по эллипсу, заданному уравнениями $\gamma_1: \begin{cases} \frac{z^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \\ x = 0 \end{cases}$, и проходит через точку A($\sqrt{\frac{5}{6}}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{3}}$).
16. Написать уравнение круговой цилиндрической поверхности, если ось поверхности задана уравнением $d: \frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{4} = \frac{z+1}{2}$ и радиус поверхности равен 2.
17. Написать каноническое уравнение однополостного гиперболоида, если известно, что он пересекается с плоскостью Oyz по гиперболе, заданной уравнениями $\gamma_1: \begin{cases} \frac{z^2}{7} - \frac{y^2}{3} = -1 \\ x = 0 \end{cases}$, и с плоскостью Oxz по гиперболе, заданной уравнениями $\gamma_2: \begin{cases} \frac{z^2}{7} - \frac{x^2}{4} = -1 \\ y = 0 \end{cases}$. Написать уравнения прямолинейных образующих, проходящих через точку A(1, $\sqrt{3}$, $\frac{\sqrt{7}}{2}$).
18. Написать каноническое уравнение гиперболического параболоида, если известно, что он пересекается с плоскостью Oyz по параболе, заданной уравнениями $\gamma_1: \begin{cases} z^2 = 2y \\ x = 0 \end{cases}$, и с плоскостью Oxy по параболе, заданной уравнениями $\gamma_2: \begin{cases} x^2 = -18y \\ z = 0 \end{cases}$.
19. Написать каноническое уравнение эллипсоида, если известно, что он пересекается с плоскостью Oxz по эллипсу, заданному уравнениями $\gamma_1: \begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1 \\ y = 0 \end{cases}$, и вершина B(0, 3, 0) принадлежит эллипсоиду.
20. Написать уравнение круговой конической поверхности, если известны вершина поверхности S(-1, 2, 1), уравнение оси поверхности $d: \frac{x}{2} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+1}{3}$ и образующие с осью поверхности составляют угол $\frac{\pi}{6}$.

21. Определить тип поверхности и ось (оси) поверхности по заданному уравнению.

1) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1$
2) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$
3) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$
4) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -2 \cdot z$
5) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

22. Определить тип поверхности и записать её уравнение по заданному чертежу.

1) 2)

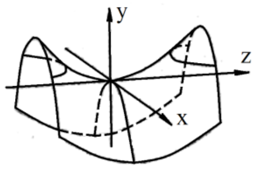
y

x

3) 4)

z

5)



– задания для самостоятельной работы:

1. Написать каноническое уравнение однополостного гиперболоида, если известно, что он пересекается с плоскостью Oyz по эллипсу, заданной уравнениями $\gamma_1\colon\begin{cases}\frac{z^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1,\\ x=0\end{cases}$ и с плоскостью Oxy по гиперболе, заданной уравнениями $\gamma_2\colon\begin{cases}\frac{y^2}{1}-\frac{x^2}{3}=1\\ z=0\end{cases}$. Написать уравнения прямолинейных образующих, проходящих через точку A$(3, 0, 2\sqrt{2})$.
2. Написать каноническое уравнение эллиптического параболоида, если известно, что он пересекается с плоскостью Oxz по параболе, заданной уравнениями $\gamma_1\colon\begin{cases}z^2=-4x\\ y=0\end{cases}$, и проходит через точку A$(\frac{-3}{2}, \sqrt{5}, 2)$.
3. Написать каноническое уравнение эллипсоида, если известно, что он пересекается с плоскостью Oyz по эллипсу, заданному уравнениями $\gamma_1\colon\begin{cases}\frac{y^2}{3}+\frac{z^2}{2}=1\\ x=0\end{cases}$, и точка B$(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1)$ принадлежит эллипсоиду.
4. Написать уравнение круговой конической поверхности, если известны вершина поверхности S(0, -2, -5), уравнение оси поверхности $d\colon\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z+1}{4}$ и точка M(2, 3, 1) принадлежит поверхности.

5. Написать каноническое уравнение двуполостного гиперболоида, если известно, что он пересекается с плоскостью Oyz по гиперболе, заданной уравнениями $\gamma_1: \begin{cases} \frac{z^2}{5} - \frac{y^2}{1} = -1 \\ x = 0 \end{cases}$, и с плоскостью Oxy по гиперболе, заданной уравнениями $\gamma_2: \begin{cases} \frac{y^2}{1} - \frac{x^2}{4} = 1 \\ z = 0 \end{cases}$.
6. Написать каноническое уравнение гиперболического параболоида, если известно, что он пересекается с плоскостью Oyz по прямым, заданным уравнениями $\gamma_1: \begin{cases} y^2 - z^2 = 0 \\ x = 0 \end{cases}$, и проходит через точку A(1, $\sqrt{15}$, 3). Написать уравнения прямолинейных образующих, проходящих через точку A.
7. Написать каноническое уравнение эллипсоида, если известно, что он пересекается с плоскостью Oxy по эллипсу, заданному уравнениями $\gamma_1: \begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{5} = 1 \\ z = 0 \end{cases}$, и с плоскостью Oyz по эллипсу, заданному уравнениями $\gamma_2: \begin{cases} \frac{z^2}{3} + \frac{y^2}{5} = 1 \\ x = 0 \end{cases}$.
8. Написать уравнение круговой цилиндрической поверхности, если её ось задана уравнением $d: \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{3}$ и точка M(2, 0, 1) принадлежит поверхности.
9. Написать каноническое уравнение однополостного гиперболоида, если известно, что он пересекается с плоскостью Oyz по гиперболе, заданной уравнениями $\gamma_1: \begin{cases} \frac{y^2}{3} - z^2 = -1 \\ x = 0 \end{cases}$, и с плоскостью Oxy по гиперболе, заданной уравнениями $\gamma_2: \begin{cases} \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1 \\ z = 0 \end{cases}$. Написать уравнения прямолинейных образующих, проходящих через точку A(0, 3, 2).
10. Написать каноническое уравнение эллиптического параболоида, если известно, что он пересекается с плоскостью Oxy по параболе, заданной уравнениями $\gamma_1: \begin{cases} x^2 = -8y \\ z = 0 \end{cases}$, и с плоскостью Oyz по параболе, заданной уравнениями $\gamma_2: \begin{cases} z^2 = 10y \\ x = 0 \end{cases}$.
11. Написать каноническое уравнение эллипсоида, если известно, что он пересекается с плоскостью Oxz по эллипсу, заданному уравнениями $\gamma_1: \begin{cases} \frac{x^2}{2} + \frac{z^2}{3} = 1 \\ y = 0 \end{cases}$, и задана вершина C(0, 5, 0) эллипсоида.
12. Написать уравнение круговой конической поверхности, если известны вершина поверхности S(1, -1, 0), уравнение оси поверхности $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = z$, а образующие составляют с осью угол $\frac{\pi}{4}$.

13. Определить тип поверхности и ось (оси) поверхности по заданному уравнению.

1) $x^2 - \frac{2 \cdot p}{h} \cdot z \cdot y = 0$

2) $y^2 = 2pz$

3) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$

4) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 2 \cdot y$

5) $\frac{-x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

14. Определить тип поверхности и записать её уравнение по заданному чертежу.

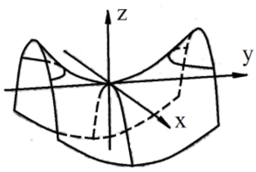
1) 2)

y

z

3) 4)

5)



Тема 10: Элементы общей алгебры (2 пары).

– задания для работы в аудитории:

1. Определить является ли заданная алгебра группой: Множество квадратных матриц второго порядка вида $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, определители которых равны 1, где (a, b, c, d)ϵR относительно операции сложения матриц.
2. Найти группу всех самосовмещений квадрата. Найти порядок группы. Выяснить, коммутативна ли эта группа. Найти подгруппы данной группы. Найти все смежные классы по одной из подгрупп, выяснив предварительно сколько различных смежных классов существует по данной подгруппе. Найти нормальный делитель, если он существует. Найти фактор-группу данной группы по нормальному делителю.
3. Доказать, что аддитивная группа целых чисел гомоморфна мультипликативной группе целых степеней числа 2. Найти ядро гомоморфизма. Доказать, что данный гомоморфизм является изоморфизмом.
4. Выяснить является ли заданная алгебра кольцом или полем: Множество чётных целых чисел относительно операций сложения и умножения. Найти хотя бы одно нетривиальное подкольцо кольца.
5. Определить является ли заданная алгебра группой: Множество Q^+ относительно операции умножения.
6. Найти группу всех самосовмещений «розы ветров». Найти порядок группы. Выяснить, коммутативна ли эта группа. Найти подгруппы данной группы. Найти все смежные классы по одной из подгрупп, выяснив предварительно сколько различных смежных классов существует по данной подгруппе. Найти нормальный делитель, если он существует. Найти фактор-группу данной группы по нормальному делителю.

7. Доказать, что множество двумерных векторов (a, b) гомоморфно множеству комплексных чисел относительно операции сложения. Найти ядро гомоморфизма. Доказать, что данный гомоморфизм является изоморфизмом.
8. Выяснить является ли заданная алгебра кольцом или полем: Множество квадратных матриц вида $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, где (a, b)ϵR, относительно операций сложения и умножения матриц. Найти хотя бы одно нетривиальное подкольцо кольца.
9. Определить является ли заданная алгебра группой: Множество квадратных матриц второго порядка вида $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, где aϵR относительно операции сложения матриц.
10. Найти группу всех самосовмещений прямоугольника. Найти порядок группы. Выяснить, коммутативна ли эта группа. Найти подгруппы данной группы. Найти все смежные классы по одной из подгрупп, выяснив предварительно сколько различных смежных классов существует по данной подгруппе. Найти нормальный делитель, если он существует. Найти фактор-группу данной группы по нормальному делителю.
11. Доказать, что аддитивная группа целых чисел гомоморфна мультипликативной группе корней степени n из единицы над полем комплексных чисел. Найти ядро гомоморфизма. Выяснить, является ли данный гомоморфизм - изоморфизмом.
12. Выяснить является ли заданная алгебра кольцом или полем: Множество чисел вида $a + b\sqrt{5}$, где (a, b)ϵZ, относительно операций сложения и умножения. Найти хотя бы одно нетривиальное подкольцо кольца.
13. Определить является ли заданная алгебра группой: Множество Q относительно операции умножения.
14. Найти группу всех самосовмещений ромба. Найти порядок группы. Выяснить, коммутативна ли эта группа. Найти подгруппы данной группы. Найти все смежные классы по одной из подгрупп, выяснив предварительно сколько различных смежных классов существует по данной подгруппе. Найти нормальный делитель, если он существует. Найти фактор-группу данной группы по нормальному делителю.
15. Доказать, что множество двумерных векторов (a, b) гомоморфно множеству матриц вида $\begin{pmatrix} a+b & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, где (a, b)ϵR, относительно операции сложения. Найти ядро гомоморфизма. Доказать, что данный гомоморфизм является изоморфизмом.
16. Выяснить является ли заданная алгебра кольцом или полем: Множество нечётных целых чисел относительно операций сложения и умножения. Найти хотя бы одно нетривиальное подкольцо кольца.

– задания для самостоятельной работы:

1. Определить является ли заданная алгебра группой: Множество квадратных матриц второго порядка вида $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, определители которых равны 1, где (a, b, c, d)ϵR относительно операции умножения матриц.
2. Найти группу всех самосовмещений квадрата. Найти порядок группы. Выяснить, коммутативна ли эта группа. Найти подгруппы данной группы. Найти все смежные классы по одной из подгрупп, выяснив предварительно сколько различных смежных классов существует по данной подгруппе. Найти нормальный делитель, если он существует. Найти фактор-группу данной группы по нормальному делителю.
3. Доказать, что аддитивная группа чётных целых чисел гомоморфна мультипликативной группе целых степеней числа 2. Найти ядро гомоморфизма. Доказать, что данный гомоморфизм является изоморфизмом.

4. Выяснить является ли заданная алгебра кольцом или полем: Множество чётных целых чисел относительно операций сложения и умножения. Найти хотя бы одно нетривиальное подкольцо кольца.
5. Определить является ли заданная алгебра группой: Множество Q^+ относительно операции умножения.
6. Найти группу всех самосовмещений «розы ветров». Найти порядок группы. Выяснить, коммутативна ли эта группа. Найти подгруппы данной группы. Найти все смежные классы по одной из подгрупп, выяснив предварительно сколько различных смежных классов существует по данной подгруппе. Найти нормальный делитель, если он существует. Найти фактор-группу данной группы по нормальному делителю.
7. Доказать, что аддитивная группа двумерных векторов (a, b), где (a, b)ϵR, гомоморфна мультипликативной группе действительных степеней (a+b) числа 2. Найти ядро гомоморфизма. Доказать, что данный гомоморфизм является изоморфизмом.
8. Выяснить является ли заданная алгебра кольцом или полем: Множество квадратных матриц вида $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, где (a, b)ϵR, относительно операций сложения и умножения матриц. Найти хотя бы одно нетривиальное подкольцо кольца.

Тема 11: Линейные пространства (2 пары).

– задания для работы в аудитории:

1. Определить размерности линейных оболочек $\boldsymbol{L}_1=\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\rangle$ и $\boldsymbol{L}_1=\langle \boldsymbol{d}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{s}\rangle$ векторов пятимерного пространства. Найти базисы подпространств $\boldsymbol{L_1}$, $\boldsymbol{L_2}$, $\boldsymbol{L_1}+\boldsymbol{L_2}$, $\boldsymbol{L_1}\cap\boldsymbol{L_2}$. Записать параметрические и общие уравнения подпространства.

№	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5
1	5	5	7	-6	-8	28	40	32	-20	-56	-2	-5	-1	-1	6
2	2	-1	8	-5	-2	30	-23	8	1	14	-6	5	4	-4	-5
3	-3	2	1	4	-6	-17	13	3	15	-17	8	-7	0	-3	-1
4	3	-9	8	-6	-6	6	-18	16	-12	-12	7	-9	-6	-7	3
5	-7	8	-1	2	-4	-12	3	-2	-4	-6	5	5	1	6	2

№	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5
1	-3	-8	-3	3	1	-2	-75	5	21	-98	-58	-85	-65	39	118
2	6	-5	-4	-8	-8	186	-151	-68	-154	-127	-66	51	-12	-6	-33
3	-6	2	4	6	8	-162	73	86	153	127	42	-33	-6	-33	33
4	8	-8	7	-3	-8	165	-187	178	-77	-187	-5	27	-38	17	27
5	-3	-2	4	-2	-2	-89	-39	75	-54	-54	29	-1	5	14	14

2. Определить размерность линейной оболочки векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$пятимерного евклидова пространства столбцов. Найти ортонормированный базис подпространства $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$, записать параметрические уравнения подпространства в векторной и координатной формах, общие уравнения подпространства.

№	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5
1	5	5	7	-6	-8	28	40	32	-20	-56	-2	-5	-1	-1	6
2	2	-1	8	-5	-2	30	-23	8	1	14	-6	5	4	-4	-5
3	-3	2	1	4	-6	-17	13	3	15	-17	8	-7	0	-3	-1
4	3	-9	8	-6	-6	6	-18	16	-12	-12	7	-9	-6	-7	3

№	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5
5	-7	8	-1	2	-4	-12	3	-2	-4	-6	5	5	1	6	2

– задания для самостоятельной работы:

1. Определить размерности линейных оболочек $\boldsymbol{L}_{1}=<\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}>$ и $\boldsymbol{L}_{1}=<\boldsymbol{d}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{s}>$ векторов пятимерного пространства. Найти базисы подпространств $\boldsymbol{L_1}$, $\boldsymbol{L_2}$, $\boldsymbol{L_1}+\boldsymbol{L_2}$, $\boldsymbol{L_1}\cap\mathbf{L_2}$. Записать параметрические и общие уравнения подпространства.

№	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5
6	0	-9	0	1	3	7	-28	9	3	4	-7	1	-9	0	5
7	0	-3	-3	2	-8	1	-15	-9	15	-33	-1	3	-3	-7	1
8	2	-7	2	8	-2	-2	-9	12	26	-12	4	-6	-3	-1	3
9	-5	-1	-6	-7	-8	-21	13	-12	-11	-10	8	-7	3	2	1

№	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5
6	-3	-8	-3	3	1	-2	-75	5	21	-98	-58	-85	-65	39	118
7	6	-5	-4	-8	-8	186	-151	-68	-154	-127	-66	51	-12	-6	-33
8	-6	2	4	6	8	-162	73	86	153	127	42	-33	-6	-33	33
9	8	-8	7	-3	-8	165	-187	178	-77	-187	-5	27	-38	17	27

2. Определить размерность линейной оболочки векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$пятимерного евклидова пространства столбцов. Найти ортонормированный базис подпространства $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$, записать параметрические уравнения подпространства в векторной и координатной формах, общие уравнения подпространства.

Вар.	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5
6	0	-9	0	1	3	7	-28	9	3	4	-7	1	-9	0	5
7	0	-3	-3	2	-8	1	-15	-9	15	-33	-1	3	-3	-7	1
8	2	-7	2	8	-2	-2	-9	12	26	-12	4	-6	-3	-1	3
9	-5	-1	-6	-7	-8	-21	13	-12	-11	-10	8	-7	3	2	1

Тема 12: Евклидовы и унитарные пространства (2 пары).

– задания для работы в аудитории:

1. Определить размерность линейной оболочки векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$четырехмерного унитарного пространства столбцов. Найти ортонормированный базис подпространства $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ и записать параметрические уравнения подпространства в векторной и координатной формах.

№р.	Re a_1	Im a_1	Re a_2	Im a_2	Re a_3	Im a_3	Re a_4	Im a_4	Re b_1	Im b_1	Re b_2	Im b_2	Re b_3	Im b_3	Re b_4	Im b_4	Re c_1	Im c_1	Re c_2	Imc_2	Re c_3	Im c_3	Re c_4	Im c_4
1	-1	6	0	0	-4	8	-1	5	0	-3	-1	-8	-4	4	-8	-7	-2	-3	4	0	0	1	-4	6
2	-6	3	-4	-2	4	-7	-5	5	8	-2	6	2	-1	-4	1	8	-7	-3	-7	7	-1	-7	4	5
3	-5	-6	6	-3	-8	-1	5	2	8	-2	4	-8	-8	0	3	-6	-1	-6	-7	-3	-1	8	1	8
4	3	8	4	-4	8	-1	-5	-7	4	5	-2	-3	-3	6	2	-7	-2	5	-4	-3	-2	3	4	-1
5	-8	-4	-7	-5	4	-3	-8	2	-5	-2	1	1	5	2	4	-8	3	6	0	-3	-2	2	-6	2

2. Найти:

1. расстояние от вектора $\boldsymbol{x}$ пятимерного пространства до подпространства $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$;
2. ортогональную проекцию вектора $\boldsymbol{x}$ на подпространство $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$;

3 ортогональную составляющую вектора ***x***.

Координаты вектора ***x***:

№	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1	-1	-4	8	7	5
2	6	7	3	1	-5
3	1	7	-8	-1	-5
4	3	4	7	2	5
5	-6	0	3	2	-8

Координаты векторов ***a***, ***b***, ***c***:

№	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5
1	3	-7	-3	-1	-1	-1	1	-3	4	1	4	1	-5	7	-3
2	-3	3	-7	-6	-2	7	4	-7	8	-7	-6	3	7	-7	1
3	-6	8	-5	-8	-4	8	0	8	3	3	-4	5	0	-4	4
4	-4	-2	8	-5	2	5	7	0	8	2	6	4	-7	-2	-3
5	5	7	-8	-1	-5	3	5	-7	6	0	7	3	3	-2	-1

3. Записать уравнение гиперплоскости пятимерного пространства столбцов с нормальным вектором ***n***, проходящей через вектор ***a***. Найти расстояние от этой гиперплоскости до вектора ***b***(радиуса-вектора точки), и угол между вектором ***b*** и гиперплоскостью.

№	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5
1	7	-1	8	-6	3	5	0	-5	-1	-2	3	6	4	-8	-8
2	8	-3	-3	3	1	-1	4	8	4	-5	-5	-7	4	-3	4
3	-1	3	2	1	4	1	-8	-6	-2	-6	4	-5	4	0	-6
4	-7	-2	0	1	-2	-1	5	-7	8	7	-1	1	4	6	2
5	6	3	5	0	-8	5	3	3	-8	-8	-8	4	-2	7	-3

4. Записать общее уравнение гиперплоскости четырехмерного пространства столбцов, проходящей через векторы ***a***,***b***,***c***,***d***. Найти нормальный вектор этой гиперплоскости.

№	a_1	a_2	a_3	a_4	b_1	b_2	b_3	b_4	c_1	c_2	c_3	c_4	d_1	d_2	d_3	d_4
1	-3	3	5	0	7	-4	6	-2	1	-3	-1	-4	-8	1	-1	-2
2	3	-2	1	7	2	-8	7	-1	-1	6	-7	-3	-8	5	8	0
3	-8	4	5	-4	-5	2	-2	8	-3	-7	1	2	-3	5	4	4
4	-1	-5	-5	7	4	-3	1	-4	-7	-8	-2	-8	-5	-4	3	0
5	5	6	-8	-1	8	-6	1	5	2	2	1	-3	0	1	-5	1

– задания для самостоятельной работы:

1. Определить размерность линейной оболочки векторов ***a***, ***b***, ***c***четырехмерного унитарного пространства столбцов. Найти ортонормированный базис подпространства $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ и записать параметрические уравнения подпространства в векторной и координатной формах.

№	Re a_1	Im a_1	Re a_2	Im a_2	Re a_3	Im a_3	Re a_4	Im a_4	Re b_1	Im b_1	Re b_2	Im b_2	Re b_3	Im b_3	Re b_4	Im b_4	Re c_1	Im c_1	Re c_2	Imc_2	Re c_3	Im c_3	Re c_4	Im c_4
6	-7	4	-2	6	-7	6	8	2	-1	1	6	-1	-2	-1	-1	6	-7	4	7	4	-5	-3	-1	2
7	0	5	-8	5	8	-7	-5	-2	-3	2	-6	7	7	-7	-2	3	-6	2	-2	-1	-2	4	-8	0
8	-3	-6	3	-4	-6	-5	6	6	-2	4	3	-8	3	-8	6	-1	-8	-6	1	5	-6	-6	5	-2
9	-7	-3	2	3	-8	-8	-5	-1	-6	0	-5	-6	4	-1	-1	7	1	-2	8	2	1	-5	7	-1

2. Найти:

1. расстояние от вектора $\boldsymbol{x}$ пятимерного пространства до подпространства $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$;
2. ортогональную проекцию вектора $\boldsymbol{x}$ на подпространство $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$;

3 ортогональную составляющую вектора $\boldsymbol{x}$.

Координаты вектора $\boldsymbol{x}$:

№	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
6	-1	4	5	1	-7
7	0	-1	-3	-2	-2
8	-1	-2	-4	-1	1
9	4	0	7	5	6

Координаты векторов $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$:

№	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5
6	-2	0	-6	-5	-3	5	5	-7	4	-3	-1	2	-7	-2	0
7	-4	-5	-4	2	4	-1	-8	-4	6	-4	8	-1	0	8	-8
8	-2	-7	-3	-6	7	4	0	-2	-2	-3	-6	-2	1	-8	0
9	-7	-5	7	2	-4	-8	7	-1	4	1	-3	-1	6	-1	5

3. Записать уравнение гиперплоскости пятимерного пространства столбцов с нормальным вектором $\boldsymbol{n}$, проходящей через вектор $\boldsymbol{a}$. Найти расстояние от этой гиперплоскости до вектора $\boldsymbol{b}$(радиуса-вектора точки), и угол между вектором $\boldsymbol{b}$ и гиперплоскостью.

№	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5
6	-3	-4	2	7	8	5	3	0	-2	7	2	-8	7	5	-6
7	6	-1	0	0	6	7	2	3	0	0	7	-2	7	-5	5
8	-8	-5	8	4	-1	2	3	4	3	6	-2	-4	-2	7	3
9	-4	-5	-6	-7	-8	0	4	5	2	-7	8	-1	-7	2	-7

4. Записать общее уравнение гиперплоскости четырехмерного пространства столбцов, проходящей через векторы $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}$. Найти нормальный вектор этой гиперплоскости.

№	a_1	a_2	a_3	a_4	b_1	b_2	b_3	b_4	c_1	c_2	c_3	c_4	d_1	d_2	d_3	d_4
6	-1	-7	-7	6	-3	8	4	6	-7	7	4	4	-8	4	4	5

№	a_1	a_2	a_3	a_4	b_1	b_2	b_3	b_4	c_1	c_2	c_3	c_4	d_1	d_2	d_3	d_4
7	0	2	7	0	4	-3	2	7	3	-8	7	-6	-2	8	1	7
8	3	8	7	7	-4	0	6	4	0	6	-8	2	3	-5	0	6
9	-7	-5	5	0	-4	-7	7	2	8	5	8	8	3	-3	4	-4

Тема 13: Линейные операторы (2 пары).

– задания для работы в аудитории:

1. Является ли заданное отображение линейным оператором в V_3:
A: $(x_1, x_2, x_3) \rightarrow (0,\ 3x_1 - x_3,\ x_1 + 5x_2)$ в базисе из единичных векторов.
Найти: 1) ядро оператора;
2) множество образов оператора;
3) матрицу оператора.

2. Задан линейный оператор своей матрицей $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix}$.
Найти: 1) собственные значения оператора;
2) собственные векторы оператора;
3) матрицу заданного линейного оператора в базисе из собственных векторов.

---

3. Является ли заданное отображение линейным оператором в V_3:
A: $\vec{x} \rightarrow \vec{c}(\vec{a}, \vec{x})$ в базисе из единичных векторов, где $\vec{c} = \vec{e}_1 - \vec{e}_3$.
Найти: 1) ядро оператора;
2) множество образов оператора;
3) матрицу оператора.

4. Задан линейный оператор своей матрицей $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{pmatrix}$.
Найти: 1) собственные значения оператора;
2) собственные векторы оператора;
3) матрицу заданного линейного оператора в базисе из собственных векторов.

---

5. Является ли заданное отображение линейным оператором в линейном пространстве вещественных функцийстепени не выше 2 – $R[x]_2$:
A: $a_0 + a_1x + a_2x^2 \rightarrow (-a_1 + a_0) + (a_1 - a_2)x + a_2x^2$ вбазисе x^0, x^1, x^2.
Найти: 1) ядро оператора;
2) множество образов оператора;
3) матрицу оператора.

6. Задан линейный оператор своей матрицей $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix}$.
Найти: 1) собственные значения оператора;
2) собственные векторы оператора;
3) матрицу заданного линейного оператора в базисе из собственных векторов.

– задания для самостоятельной работы:

1. Является ли заданное отображение линейным оператором в V_3:
A: $(x_1, x_2, x_3) \rightarrow (2x_1 - 3x_2 + x_3,\ x_1,\ x_1 - x_2)$ в базисе из единичных векторов.

Найти: 1) ядро оператора;
2) множество образов оператора;
3) матрицу оператора.

2. Задан линейный оператор своей матрицей $A = \begin{pmatrix} 7 & -12 & -2 \\ 3 & -4 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Найти: 1) собственные значения оператора;
2) собственные векторы оператора;
3) матрицу заданного линейного оператора в базисе из собственных векторов.

---

3. Является ли заданное отображение линейным оператором в V_3:
А: $\vec{x} \to (\vec{x}, \vec{b})\vec{b}$ в базисе из единичных векторов, где $\vec{b}$ - фиксированный вектор.
Найти: 1) ядро оператора;
2) множество образов оператора;
3) матрицу оператора.

4. Задан линейный оператор своей матрицей $A = \begin{pmatrix} -1 & -8 & 2 \\ 2 & 9 & -2 \\ 2 & 8 & -1 \end{pmatrix}$.

Найти: 1) собственные значения оператора;
2) собственные векторы оператора;
3) матрицу заданного линейного оператора в базисе из собственных векторов.

---

5. Является ли заданное отображение линейным оператором в линейном пространстве вещественных функцийстепени не выше 2 – $R[x]_2$:
А: $a_0+a_1x+a_2x^2 \to (a_1-a_0)+a_2x+a_0x^2$вбазисе x^0, x^1, x^2.
Найти: 1) ядро оператора;
2) множество образов оператора;
3) матрицу оператора.

6. Задан линейный оператор своей матрицей $A = \begin{pmatrix} 7 & -12 & -2 \\ 3 & -4 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Найти: 1) собственные значения оператора;
2) собственные векторы оператора;
3) матрицу заданного линейного оператора в базисе из собственных векторов.

Тема 14: Билинейные и квадратичные формы (2 пары).

– задания для работы в аудитории:

1. Задана билинейная форма А($\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$). Данные приведены в таблице. Необходимо выполнить следующие задания:

.Записать матрицу билинейной формы;
.Записать билинейную форму;
.Определить ранг билинейной формы, вырождена ли заданная форма;
.Определить, является ли билинейная форма симметричной или кососимметричной, используя определение;

№	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{31}	a_{32}	a_{33}
1	-1	4	2	-1	1	-3	-5	0	-5
2	0	3	3	-3	0	-5	3	5	0
3	-3	1	-5	1	-1	-4	-5	-4	4
4	-1	-2	0	2	-2	0	3	-1	3
5	3	3	-1	1	2	0	-5	4	3
6	-2	-1	-4	0	-2	4	-5	-3	-1

2. Задана квадратичная форма A(***x***, ***x***).

Найти:

- Матрицу квадратичной формы;
- Полярную билинейную форму;
- Определить ранг квадратичной формы, вырождена ли заданная форма;
- Классифицировать квадратичную форму, используя критерий Сильвестра;
- Привести к каноническому виду методами Якоби, Лагранжа и ортогональным преобразованием. В каждом случае записать формулы и матрицы преобразования.
- Сделать проверку с помощью пакета символьных вычислений MAPLE, используя матрицу преобразования полученную при приведении к каноническому виду.
- Индекс квадратичной формы, положительный и отрицательный индексы, сигнатуру и классифицировать форму, используя полученные результаты. Сравнить с результатами п.4.

1. $x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3 + 4x_3^2.$

2. $4x_1^2 + 4x_1x_2 + 8x_1x_3 - 3x_2^{\ 2} + 4x_3^2.$

3. $4x_1^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3 + x_3^2.$

4. $4x_1^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3 + 3x_2^2 - 2x_3^2.$

5. $x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 3x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2.$

6. Заменить коэффициент a_{ij}на λи определить при каких значениях λзаданная квадратичная форма будет знакоопределённой;

Данные приведены в таблице.

№	*i*	*j*
1	1	1
2	1	2
3	1	3
4	2	3
5	2	2
6	3	3

- задания для самостоятельной работы:

1. Задана билинейная форма A(***x***, ***y***). Данные приведены в таблице. Необходимо выполнить следующие задания:

.Записать матрицу билинейной формы;

.Записать билинейную форму;

.Определить ранг билинейной формы, вырождена ли заданная форма;

.Определить, является ли билинейная форма симметричной или кососимметричной, используя определение;

№	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{31}	a_{32}	a_{33}
7	-4	1	1	-2	-1	-5	-4	-1	3

8	1	-5	1	-4	-4	2	-2	4	1
9	-3	-5	3	-1	0	1	3	-5	-2
10	3	-5	-5	-1	1	3	1	3	0

2. Задана квадратичная форма A(***x***, ***x***).

Найти:

- Матрицу квадратичной формы;
- Полярную билинейную форму;
- Определить ранг квадратичной формы, вырождена ли заданная форма;
- Классифицировать квадратичную форму, используя критерий Сильвестра;
- Привести к каноническому виду методами Якоби, Лагранжа и ортогональным преобразованием. В каждом случае записать формулы и матрицы преобразования.
- Сделать проверку с помощью пакета символьных вычислений MAPLE, используя матрицу преобразования полученную при приведении к каноническому виду.
- Индекс квадратичной формы, положительный и отрицательный индексы, сигнатуру и классифицировать форму, используя полученные результаты. Сравнить с результатами п.4.

1. $x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2x_3 + x_3^2.$

2. $x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 3x_2^2 - 6x_2x_3 - 2x_3^2.$

- Заменить коэффициент a_{ij}на λи определить при каких значениях λзаданная квадратичная форма будет знакоопределённой;

Данные приведены в таблице.

№	*i*	*j*
7	1	1
8	1	2
9	2	3
10	1	3

Тема 15: Алгебра многочленов (3 пары).

- задания для работы в аудитории:

«Кольца многочленов»

1. Задан многочлен f(x) степени n от одной неизвестной. Данные приведены в таблице 1.

Необходимо, используя схему Горнера разложить многочлен:

1. на линейные множители над полем комплексных чисел, определив при этом кратность каждого корня;
2. по степеням $(x - x_0)$ и найти значения его производных в точке x_0;
3. определить при каком значении коэффициента a_{ij} имеет x_0 корнем кратности не ниже 2;

№	Многочлен f(x)	a	x_1	x_2	b
1	$x^6-6x^4-4x^3+9x^2+12x+4$	–2	–1	2	–3
2	$x^5-10x^3-20x^2-15x-4$	3	–1	4	–1
3	$x^6-15x^4+8x^3+51x^2-72x+27$	–1	1	–3	2
4	$x^5-5x^4-5x^3+45x^2-108$	2	–2	3	3

2. Заданы многочлены f(x) и g(x) от одной неизвестной. Данные приведены в таблице1.

Найти:

.НОД и НОК многочленов, используя свойства делимости и определение;

.НОД и НОК многочленов, используя разложение на множители по схеме Горнера;

.определить при каком значении коэффициента a_{ij} имеет x_0 корнем кратности не ниже 2;

№	Многочлен f(x)	Многочлен g(x)
1	$x^6-6x^4-4x^3+9x^2+12x+4$	$x^5+x^4-2x^3-2x^2+x+1$
2	$x^5-10x^3-20x^2-15x-4$	$x^5+7x^4+19x^3+25x^2+16x+4$

3. Задан симметрический многочлен F от n неизвестных и многочлен $g(x)$ от одной неизвестной. Данные приведены в таблицах 1 и 2. Найти значение симметрического многочлена F от корней многочлена g(x).(при необходимости понизить степень многочлена g(x) в зависимости от количества переменных в симметрическом многочлене).

№	F(x)
1	$(x_1+1)(x_2+1)(x_3+1)$
2	$(x_1-1)(x_2-1)(x_3-1)$
3	$(x_1+x_2)(x_2+x_3)(x_3+x_1)$
4	$(x_1^2+1)(x_2^2+1)(x_3^2+1)$

– задания для самостоятельной работы:

1. Задан многочлен f(x) степени n от одной неизвестной. Данные приведены в таблице 1.

Необходимо, используя схему Горнера разложить многочлен:

1. на линейные множители над полем комплексных чисел, определив при этом кратность каждого корня;
2. по степеням $(x - x_0)$ и найти значения его производных в точке x_0;

определить при каком значении коэффициента a_{ij} имеет x_0 корнем кратности не ниже 2;

№	Многочлен f(x)	a	x_1	x_2	b
5	$x^5+x^4-2x^3-2x^2+x+1$	–3	–1	1	1
6	$x^5+7x^4+19x^3+25x^2+16x+4$	–1	–1	–2	–3
7	$x^5-3x^4-21x^3+43x^2+96x-180$	2	2	–3	2
8	$x^5-x^4-2x^3+2x^2+x-1$	3	–1	1	–4

2. Заданы многочлены f(x) и g(x) от одной неизвестной. Данные приведены в таблице1.

Найти:

.НОД и НОК многочленов, используя свойства делимости и определение;

.НОД и НОК многочленов, используя разложение на множители по схеме Горнера;

.определить при каком значении коэффициента a_{ij} имеет x_0 корнем кратности не ниже 2;

№	Многочлен f(x)	Многочлен g(x)

3	$x^6 - 15x^4 + 8x^3 + 51x^2 - 72x + 27$	$x^5 - 3x^4 - 21x^3 + 43x^2 + 96x - 180$
4	$x^5 - 5x^4 - 5x^3 + 45x^2 - 108$	$x^5 - x^4 - 2x^3 + 2x^2 + x - 1$

3. Задан симметрический многочлен F от n неизвестных и многочлен $g(x)$ от одной неизвестной. Данные приведены в таблицах 1 и 2. Найти значение симметрического многочлена F от корней многочлена $g(x)$.(при необходимости понизить степень многочлена g(x) в зависимости от количества переменных в симметрическом многочлене).

№	F(x)
5	$(x_1^2-1)(x_2^2-1)(x_3^2-1)$
6	$(2x_1 - x_2 - x_3)(2x_2 - x_1 - x_3)(2x_3 - x_1 - x_2)$
7	$(x_1 x_3 + x_2)(x_2 x_1 + x_3)(x_3 x_2 + x_1)$
8	$x_1^4 + x_2^4 + x_3^4$

2 семестр

Тема 1. Понятие тензора.

Задачи для работы в аудитории:

1.Выписать объекты четвертого порядка различных типов.

2. Определить порядок объектов $a_r^{ik} b_i$, $a_{st}^{pr} b_p^s c_r$, $c_{mn}^k d_k^r e_s^{mj}$.

3. Показать,a_s^{rs}что есть объект первого порядкаи выписать полностью его составляющие.

4. Написать в развернутой форме следующиеобъекты: a^{ii}, $a_r b^{rs}$, $a_i b_j s^{ij}$.

5. Написать законы преобразования для различных типов тензоров четвертого порядка.

Задачи для самостоятельной работы:

1. Выписать полную систему линейных равенств, задаваемую выражением $a_{rs} x^s = b_r$.

2. Сколько членов содержится всумме $a_{mnp} x^m y^n z^p$?

3. Проверить формулы $a^r = \gamma_m^r \bar{a}^m$, $a_r = c_r^m \bar{a}_m$.

Тема 2. Тензорная алгебра.

Задачи для работы в аудитории:

1. Дано: объект второго порядка $(a_{ij}) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ и объект первого порядка $x_i = (-2, 1, 2)$. Найти $a_{ij} x_j$.

2. Дано: объект второго порядка $(a_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ и объекты первого порядка $x_i = (3, -2, 0)$ и $c_i = (4, -3, 0)$. Найти $a_{ij} c_i x_j$.

3. Дано: объект второго порядка $(a_{ij}) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ и объект первого порядка $x_i = (3, 1, -2)$. Найти $(a_{ij} - 0{,}25\delta_{ij} a_{rr}) x_j$.

4. Дано: объект второго порядка $(a_k^i) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. Вычислить свертку $\delta_j^i \delta_i^j \delta_l^k a_k^l$.

5. Вычислить свертку $e^{ijk}b_{jk}c_i$, если $(b_{ik})=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 3 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 4\end{pmatrix}$, $c_i=(3, 2, -1)$.

Задачи для самостоятельной работы:

1. Пусть А — определитель объекта a_s^r, аA_r^i— алгебраическое дополнение элемента a_i^r. Доказать, что $\frac{\partial A}{\partial a_i^r} = A_r^i$.
2. Показать, что

а) $\delta_{ijk}^{rst}a_m^i a_n^j a_p^k=|a_s^r|\delta_{mnp}^{rst}$,

б) $\delta_{ijk}^{rst}a_r^i a_s^j a_t^k=6|a_s^r|$.

Тема 3. Взаимные базисы.

Задачи для работы в аудитории:

1. Написать в развернутой форме $d=a_{ij}a_{ij}-a_{ii}a_{jj}$, если a_{ij} симметричный объект.
2. Сколько различных составляющих содержится в абсолютно симметричном объекте третьего порядка?
3. Сколько отличных от нуля составляющих имеет абсолютно антисимметричный объект третьего порядка?
4. Доказать, что если a_{mn} антисимметричный объект, то $a_{mn}x^m x^n=0$.

Задачи для самостоятельной работы:

1. Доказать, что если уравнение $a_{mn}x^m x^n=0$ верно для всех значений переменных x_r, то a_{mn} антисимметричен.
2. Пусть a_{rs} есть объект второго порядка, удовлетворяющий уравнению $ba_{rs}+ca_{sr}=0$. Показать, что либо $b=-c$ и a_{rs} симметричен, либо $b=c$ и a_{rs} антисимметричен.

Тема 4. Якобиан отображения.

Задачи для работы в аудитории:

1. Показать, что если тензор второго порядка в некоторой системе переменных является симметричным, то в любой другой системе переменных он также является симметричным.
2. Показать, что если имеется соотношение вида $a_{st}^r=b_s^r d_t$, связывающие тензоры a_{st}^r, b_s^r, d_t в некоторой системе координат, то тоже самое соотношение между составляющими имеет место в любой другой системе координат.
3. Показать, что сумма диагональных элементов (след) матрицы a_{ii} есть инвариант.
4. Показать, что $a_{mn}^r b_r^p$ есть тензор третьего порядка.
5. Доказать, что все алгебраические дополнения элементов определителя $|a_s^r|$ образуют истинный тензор, если a_s^r есть истинный тензор.

Задачи для самостоятельной работы:

1. Показать, что равенства $(a_{st}^r+b_{st}^r)x^t=k_s^r$ образуют систему тензорных уравнений.
2. Показать, что если a_s^r есть истинный тензор, то $|a_s^r|$ есть истинный скаляр.
3. Написать законы преобразования тензоров третьего порядка различных типов относительно общего преобразования

Тема 5. Символы Кронекера.

Задачи для работы в аудитории:

1. Найти следующие выражения, содержащие символ Кронекера: *a*) $\delta_s^r\delta_r^s$; *b*) $\delta_s^r\delta_r^k\delta_k^s$; *c*) $\delta_j^i a_i b^j$; *d*) $\delta_s^r\delta_n^m a^{sn}$.
2. Найти составляющие двумерного объекта $\delta_j^i\delta_k^j$.
3. Вычислить $e_{ijr}e^{rji}$.

Задачи для самостоятельной работы:

1. Доказать равенство $\delta_{tp}{}^{mn}a^{tp}=a^{mn}-a^{nm}$.
2. Найти составляющие объекта $e^{ijk}c_{ik}$.
3. Доказать, что $e_{ijk}a^i a^k=0$.

Тема 6. Ковариантные производные.

Задачи для работы в аудитории:

1. Доказать, что если a_{ij} — симметричный, а b_{ij} — антисимметричный объекты, то $a_{ij}b_{ij}=0$.
2. Доказать, что если объект a_{ijk} симметричен i по j и антисимметричен по j и k, то он равен нулю.
3. Пусть a_{ij} — симметричный объект, $b_i^{ij}=b_j^{ji}$. Показать, что $a_{ij}b_i^{ij}=0$.
4. Показать, что любой объект второго порядка можно представить в виде суммы симметричного и антисимметричного тензоров. Доказать, что полная свертка этих тензоров равна нулю.
5. Доказать, что если $a_{mn}x^m x^n=b_{mn}x^m x^n$ для произвольных значений x^r, то $a_{mn}+a_{nm}=b_{mn}+b_{nm}$, и, следовательно, если a_{mn} и b_{mn} симметричны, то $a_{mn}=b_{mn}$.

Задачи для самостоятельной работы:

1. Доказать, что если $b_r{}^s$ обладает тем свойством, что $b_m{}^r b_s{}^m=\delta_s{}^r$, то $|b_s{}^r|=\pm 1$.
2. Показать, что $\delta_{mn}{}^{ij}a_r{}^m a_s{}^n=a_r{}^i a_s{}^j-a_r{}^j a_s{}^i=\delta_{rst}{}^{ijk}A_k{}^t$.
3. Если объект a_{mn} — симметричен, показать, что алгебраическое дополнение A^{mn} тоже симметрично.

Тема 7. Контравариантные производные.

Задачи для работы в аудитории:

1. Доказать, что:

а) $e^{rst}A_r{}^i=e^{ijk}a_j{}^s a_k{}^t$,

б) $e_{ijk}A_r{}^i=e_{rst}a_j{}^s a_k{}^t$.

2. Доказать, что $A=1/6\ \delta_{rst}{}^{ijk}a_i{}^r a_j{}^s a_k{}^t$, где A — определитель объекта $a_j{}^c$.
3. Доказать, что $e^{ijr}e_{rst}=\delta_s{}^i\delta_t{}^j-\delta_t{}^i\delta_s{}^j$.
4. Показать, что дифференциалы переменных dx^r образуют контравариантный тензор.

Задачи для самостоятельной работы:

1. Доказать, что $e_{rst}e^{tsk}=-2\delta_r{}^k$.
2. Пусть дан антисимметричный объект b^{rs} и вектор $a_i=0{,}5e_{ijk}b^{jk}$. Показать, что $b^{rs}=e^{rsi}a_i$.
3. Показать, что $(a_{ijk}+a_{jki}+a_{jik})x_i x_j x_k=3a_{ijk}x_i x_j x_k$.

Тема 8. Полилинейные формы.

Задачи для работы в аудитории:

1. Показать, что если a_{mn} есть истинный ковариантный тензор, то $|a_{mn}|$ есть псевдоскаляр веса 2.
2. Показать, что если a_{mn} есть истинный контравариантный тензор, то $|a_{mn}|$ есть псевдоскаляр веса -2.
3. Написать законы преобразования тензоров третьего порядка различных типов относительно общего преобразования.
4. Доказать, что $\frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^m}\frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^s}=\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^m}\frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^s}=\delta_s^r$.

Задачи для самостоятельной работы:

1. Показать, что если λ^r, μ^r — два единичных вектора, то угол θ между их направлениями определяется равенством $sin^2\theta=(g_{mn}g_{rs}-g_{mr}g_{ns})\lambda^m\lambda^n\mu^r\mu^s$.
2. Показать, что если γ_1,γ_2, γ_3направляющие косинусы вектора, что в косоугольных декартовых координатах они удовлетворяют соотношению $g^{mn}\gamma_m\gamma_n=1$.
3. Доказать, что$\left|\frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^s}\right| = \frac{1}{\left|\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^s}\right|}$.

Тема 9. Геометрия поверхности.

Задачи для работы в аудитории:

1. Найти координатные поверхности для параболической системы координат

$y^1=x^1x^2cos\, x^3$,

$y^2=x^1x^2sin\, x^3$,

$y^3=0{,}5((x^2)^2-(x^1)^2)$.

2. Показать, что для сферической системы координат

$y^1=x^1sin\, x^2cos\, x^3$,

$y^2=x^1sin\, x^2sin\, x^3$,

$y^3=x^1cosx^2$

x^1 – поверхности — семейство сфер с центром в начале координат; x^2 — поверхности — круговые конусы; x^3 – поверхности — плоскости, проходящие через y^3.

3. Найти координатные поверхности для цилиндрической системы координат

$y^1=x^1cos\, x^2$,

$y^2=x^1sin\, x^2$,

$y^3=x^3$.

Задачи для самостоятельной работы:

1. Найти линейный элементds^2для:

а) для параболической системы координат,

б) для цилиндрической системы координат.

2. Показать, что длины элементарных дуг координатных кривых равны , $ds_2 = \sqrt{g_{22}}dx^2$, $ds_3 = \sqrt{g_{33}}dx^3$.

Тема 10. Диады.

Задачи для работы в аудитории:

1. Доказать равенство $\frac{\partial}{\partial x^r}(g_{mn}X^mY^n) = X_{m,r}Y^m + X^mY_{m,r}$.
2. Доказать равенство $\frac{\delta}{\delta t}(g_{mn}X^mY^n) = g_{mn}\frac{\delta X^m}{\delta t}Y^n + g_{mn}X^m\frac{\delta Y_n}{\delta t}$.

Задачи для самостоятельной работы:

1. Исходя из формулы , доказать равенство $\frac{\partial y^i}{\partial x^m} = g_{mn}\frac{\partial y^n}{\partial x^i}$.
2. Доказать, что $\frac{\partial x^r}{\partial y^p} = g^{rm}\frac{\partial y^p}{\partial x^m}$, и вывести отсюда, что $g^{rm} = \frac{\partial x^r}{\partial y^k}\frac{\partial x^m}{\partial y^k}$.

Тема 11. Анализ поверхностей (2 пары).

Задачи для работы в аудитории:

1. ЗаписатьdivX^rв цилиндрической и сферической системе координат.
2. Записать rotX^r в цилиндрической и сферической системе координат.
3. Доказать, чтоdiv(rotX^r)$=0$.
4. Доказать, что расстояния базисных точек от начала координат определяются формулами: $OE_1 = \sqrt{g_{11}}, OE_2 = \sqrt{g_{22}}, OE_3 = \sqrt{g_{33}}$.

Задачи для самостоятельной работы:

1. Доказать, что площадь треугольника OE_2E_3 равна $0{,}5\sqrt{gg^{11}}$.
2. Показать, что если γ_1, γ_2, γ_3 направляющие косинусы вектора, то в косоугольных декартовых координатах они удовлетворяют соотношению $g^{mn}\gamma_m\gamma_n=1$.
3. Показать, что в ортогональных декартовых координатах косинусы углов, которые орт λ^r образует с координатными осями, равны $\lambda^1, \lambda^2, \lambda^3$.

Тема 12. Символы Кристоффеля (2 пары).

Задачи для работы в аудитории:

1. Найти составляющие символов Кристоффеля $\Gamma_{1,23}$ и Γ^2_{12} для параболической системы координат
$y^1=x^1x^2\cos x^3$,
$y^2=x^1x^2\sin x^3$,
$y^3=0{,}5((x^2)^2-(x^1)^2)$.
2. Найти составляющие символов Кристоффеля $\Gamma_{2,21}$ и Γ^3_{11} для сферической системы координат
$y^1=x^1\sin x^2\cos x^3$,
$y^2=x^1\sin x^2\sin x^3$,
$y^3=x^1\cos x^2$.
3. Показать, что $\Gamma_{r,mn}$ и Γ^r_{mn} симметричны по m и n.
4. Доказать, что в ортогональных системах координат выполняются равенства:
а) $\Gamma_{k,ij}=\Gamma^k_{ij}=0$ при $i\neq j,\ j\neq k,\ k\neq i$;
б) $\Gamma_{i,ij}=-\Gamma_{j,ii}=$(нет суммы по i);
в) $\Gamma^i_{ij}=\frac{1}{2}g_{ii}\frac{\partial g_{ii}}{\partial x^j}$(нет суммы по i).

Задачи для самостоятельной работы:

1. Показать, что $\Gamma_{s,rt}+\Gamma_{r,st}=\frac{\partial g_{rs}}{\partial x^t}$.
2. Показать, что $\Gamma_{t,rs}=g_{mt}\Gamma^m_{rs}$.
3. Доказать равенство $X_{r,s}-X_{s,r}=\frac{\partial X_r}{\partial x^s}-\frac{\partial X_s}{\partial x^r}$.
4. Доказать, что если X — длина вектора X^r, то $X_{,r}=\frac{X_{m,r}X^m}{X}$.

6.2 Внеаудиторная самостоятельная работа

Самостоятельная работа студентов по изучению дисциплины предусматривает следующие виды деятельности:

- изучение теоретического материала по конспектам лекций, рекомендованным литературных источникам (отчетность – конспект, экзамен в конце семестра).
- изучение теоретического материала по темам, выносимым на самостоятельное изучение (отчетность – выполнение расчетно-графических работ, тестирование, экзамен в конце семестра).

1 семестр

№ темы	Тема	Виды работы
1	Выполнение расчетно-графической работы по темам «Комплексные числа», «Алгебра матрица», «Системы линейных уравнений»	Изучение учебной литературы, решение задач для самостоятельной работы и расчетно-графического задания

2	Выполнение расчетно-графической работы по темам «Векторная алгебра», «Системы координат на плоскости и в пространстве»	
3	Выполнение расчетно-графической работы по темам «Прямая на плоскости», «Линии второго порядка»	
4	Выполнение расчетно-графической работы по темам «Прямая и плоскость в пространстве»	
5	Выполнение расчетно-графической работы по темам «Элементы общей алгебры»	
6	Выполнение расчетно-графической работы по темам «Линейные пространства», «Евклидовы и унитарные пространства»	
7	Выполнение расчетно-графической работы по темам «Линейные операторы», «Билинейные и квадратичные формы»	
8	Подготовка к экзамену	Повторение всех тем по конспектам и учебной литературе

2 семестр

№ темы	Тема	Компетенции по теме
1	Понятие тензора.	Изучение учебной литературы, решение задач для самостоятельной работы
2	Символы Кронекера.	
3	Ковариантные тензоры	
4	Контравариантные тензоры.	
5	Взаимные базисы.	
6	Якобиан отображения	
7	Подготовка к экзамену	Повторение всех тем по конспектам и учебной литературе

7. Примерная тематика контрольных работ, курсовых работ (при наличии)

Курсовые работы отсутствуют

Примерные задания расчетно-графических работ

РГЗ № 1

Вариант № 1

1. Заданы комплексные числа α=1 + i $\sqrt{3}$ и β=1 + i
   Найти в алгебраической форме:
   1) сопряжённые им комплексные числа $\overline{\alpha}$ и $\overline{\beta}$,
   2) произведение α и β,
   3) частное α/β,
   4) квадратный корень из α,

   Перевести числа α и β в тригонометрическую форму и найти:
   1) модуль и аргумент,
   2) произведение α и β,
   3) $(\alpha)^n$, где n = 1500,
   4) корень n-ой степени из β, где n = 5,
   5) первообразные корни из n.
2. Найти все корни квадратного уравнения и изобразить их на комплексной плоскости:
   $x^2 + (2 - 6i)x – (13 + 18i)=0$.
3. Вычислить определитель квадратной матрицы A четвёртого порядка тремя способами:
   1. разложением по i-му столбцу;
   2. обнулив предварительно элементы j-ой строки;
   3. разложением по минорам второго порядка.

Элементы матрицы и номера строк и столбцов приведены в таблице:

Вар.	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	i	j
1	1	1	0	-4	-3	-5	-4	4	0	-2	-1	-3	-1	1	-1	-1	2	4

4. Для данных матриц $A_{2\times4}$ и $B_{4\times2}$ вычислить:
1) произведения C=$A \cdot B$ и D=$B \cdot A$;
2) для матрицы А найти левую и правую обратные матрицы.

Элементы матриц A и B приведены в таблице:

Вар.	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	b_{11}	b_{12}	b_{21}	b_{22}	b_{31}	b_{32}	b_{41}	b_{42}
1	-3	9	0	9	4	3	-4	-7	-6+9i	0+8i	-8+8i	-8+4i	7-9i	2-9i	6-3i	-6-2i

5. Решить систему линейных уравнений $AX = B$ размера 3×3:

1) методом Крамера;
2) методом обратной матрицы.

Коэффициенты системы приведены в таблице:

Вар.	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{31}	a_{32}	a_{33}	b_1	b_2	b_3
1	-3	9	-6-2i	9	6-3i	3	-4	-7	-6+9i	0+8i	-8+8i	-8+4i

6. Определить ранг основной и расширенной матриц системы и решить систему линейных уравнений $AX = B$ размера 4×3 методом Гаусса.

Коэффициенты системы приведены в таблице:

Вар.	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{41}	a_{42}	a_{43}	b_1	b_2	b_3	b_4
1	-1	-2	1	-2	-3	1	-1	1	1	2	5	0	5	8	-1	-12

7. Решить систему линейных уравнений $AX = B$ размера 3×4:

1) определить ранг основной и расширенной матриц системы, сделать вывод о количестве решений системы;
2) методом Гаусса или Жордано-Гаусса;
3) обобщённым методом Крамера;
4) найти общее решение системы;

5) найти фундаментальную систему решений и выразить с её помощью общее решение.

Коэффициенты системы приведены в таблице:

Вар.	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	b_1	b_2	b_3
1	-3	-3	-1	0	-2	0	-2	-1	-7	-3	-5	-2	11	5	21

РГЗ № 2

Вариант 1.

1. Задан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, где AB=a, $\boldsymbol{i}\|\mathbf{AD}$, $\boldsymbol{j}\|\mathbf{AB}$, $\boldsymbol{k}\|\mathbf{AA_1}$. Старая система координат R=(A, $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$), новая R'=(M, $\boldsymbol{i'}$, $\boldsymbol{j}$', $\boldsymbol{k}$'). Записать формулы преобразования координат, если M=AC∊BD, $\boldsymbol{i'}\|\mathbf{AC}$, $\boldsymbol{j'}\|\mathbf{DB}$, $\boldsymbol{k'}\|\mathbf{AA_1}$.
2. Заданы декартова и полярная системы координат.
   Записать формулы перехода.
   Точка M(1, π/4) задана в полярной системе координат, найти координаты точки в прямоугольной системе координат.
   Точка M(-5, 2) задана в прямоугольной системе координат, найти координаты точки в полярной системе координат.
3. Заданы прямоугольная декартова и сферическая системы координат
   Записать формулы перехода.
   Точка M(3, π/3, π/6) задана в сферической системе координат, найти координаты точки в прямоугольной системе координат.
   Точка M(7, 3, -1) задана в прямоугольной системе координат, найти координаты точки в сферической системе координат.
4. В некотором ортонормированном базисе пространства заданы своими координатами векторы $\overrightarrow{OA}=(a_1,a_2,a_3)$, $\overrightarrow{OB}=(b_1,b_2,b_3)$, $\overrightarrow{OC}=(c_1,c_2,c_3)$. На этих векторах как на ребрах построена пирамида *OABC*. Точка *M* лежит на ребре *AC* и *AM*:*MC*=*p*:*q*. Найти:
   1. длину ребра AB;
   2. угол ABC;
   3. угол внешний по отношению к углу ACB;
   4. координаты точки M и площадь треугольника OMB;
   5. объем пирамиды OABC;
   6. высоту пирамиды OCBM, опущенную на грань OCB.

Вар	a_1	a_2	a_3	b_1	b_2	b_3	c_1	c_2	c_3	p	q
1	-3	-2	-1	-6	-3	-7	-5	-5	-9	3	2

РГЗ № 3.

1. В плоскости даны координаты вершин треугольника ABC:

1	A(2,4)	B(-2,6)	C(0,-2)

Найти (*к каждому заданию выполнить чертёж*):

1. косинус внутреннего угла при вершине C;
2. косинус внешнего угла при вершине B;
3. координаты вектора, параллельного биссектрисе, проведенной из вершины A;
4. длину биссектрисы, проведённой из вершины A;
5. длину медианы, проведённой из вершины A;
6. длину высоты, проведённой из вершины A;
7. площадь треугольника ABC;

8. Составить уравнения прямых AB, BC, AC;
9. Составить систему неравенств, определяющую внутренность треугольника ABC;
10. Написать общее уравнение биссектрисы AD внутреннего угла A (для четных вариантов) или внешнего угла A (для нечетных вариантов).
11. Найти центры и радиусы окружностей, описанной около треугольника ABC и вписанной в треугольник ABC.

2. Задано уравнение линии второго порядка.
Необходимо:

1. Определить тип линии второго порядка с помощью инварианта I_2.
2. Определить наличие центров у линии и найти координаты центра, если он существует.
3. Привести уравнение линии второго порядка к каноническому виду.
4. Определить вид линии второго порядка.
5. Построить график линии в канонической системе координат.

Номер варианта	Уравнение общее
1	$31x^2 - 10x\sqrt{3}\,y + 36x\sqrt{3} + 21y^2 - 36y - 92 - 16x - 16y\sqrt{3} = 0$

РГЗ № 4.

1. Написать каноническое уравнение двуполостного гиперболоида, если известно, что он пересекается с плоскостью Oyz по гиперболе, заданной уравнениями $\gamma_1\colon\begin{cases}\frac{z^2}{4}-\frac{y^2}{2}=-1\\ x=0\end{cases}$, и с плоскостью Oxy по гиперболе, заданной уравнениями $\gamma_2\colon\begin{cases}\frac{y^2}{2}-\frac{x^2}{1}=1\\ z=0\end{cases}$.
2. Написать каноническое уравнение гиперболического параболоида, если известно, что он пересекается с плоскостью Oyz по прямым, заданным уравнениями $\gamma_1\colon\begin{cases}y^2-z^2=0\\ x=0\end{cases}$, и проходит через точку A(1, $\sqrt{15}$, 3). Написать уравнения прямолинейных образующих, проходящих через точку A.
3. Написать каноническое уравнение эллипсоида, если известно, что он пересекается с плоскостью Oxy по эллипсу, заданному уравнениями $\gamma_1\colon\begin{cases}\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{1}=1\\ z=0\end{cases}$, и с плоскостью Oxz по эллипсу, заданному уравнениями $\gamma_2\colon\begin{cases}\frac{x^2}{3}+\frac{z^2}{2}=1\\ z=0\end{cases}$.
4. Написать уравнение круговой цилиндрической поверхности, если ось поверхности задана уравнением $d\colon\frac{x-1}{2}=y+1=\frac{z-2}{2}$ и точка M (4, 5, 1) принадлежит поверхности.

5. В пространстве задан тетраэдр ABCD координатами своих вершин:

1	A(5,-1,2)	B(2,-1,-1)	C(3,0,-3)	D(6,0,-1)

Найти:

1) угол между ребрами AB и BC;
2) площади граней тетраэдра ABCD;
3) объём тетраэдра ABCD;
4) длину высоты тетраэдра, проведенной из вершины A на грань BCD;

5) длину апофемы грани ACD проведённой из вершины A на ребро CD;
6) угол между ребром AB и гранью BCD.

РГЗ № 5.

Вариант №1

1. Определить является ли заданная алгебра группой:
Множество чётных чисел относительно операции умножения.
2. Найти группу всех самосовмещений ромба.
Найти порядок группы. Выяснить, коммутативна ли эта группа.
Найти подгруппы данной группы.
Найти все смежные классы по одной из подгрупп, выяснив предварительно сколько различных смежных классов существует по данной подгруппе.
Найти нормальный делитель, если он существует.
Найти фактор-группу данной группы по нормальному делителю.
3. Доказать, что множество двумерных векторов (a, b) гомоморфно множеству матриц вида $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, где (a, b)ϵR, относительно операции сложения.
Найти ядро гомоморфизма.
Доказать, что данный гомоморфизм является изоморфизмом.
4. Выяснить является ли заданная алгебра кольцом или полем:
Множество нечётных целых чисел относительно операций сложения и умножения.
Найти хотя бы одно нетривиальное подкольцо кольца.

РГЗ № 6.

1. Определить размерности линейных оболочек L_1=<*a*, *b*, *c*> и L_1=<*d*, *p*, *s*> векторов пятимерного пространства. Найти базисы подпространств L_1, L_2, L_1+L_2, $L_1 \cap L_2$. Записать параметрические и общие уравнения подпространства.

Вар.	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5
1	5	5	7	-6	-8	28	40	32	-20	-56	-2	-5	-1	-1	6

Вар.	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5
1	-3	-8	-3	3	1	-2	-75	5	21	-98	-58	-85	-65	39	118

2. Определить размерность линейной оболочки векторов ***a***, ***b***, ***c***четырехмерного унитарного пространства столбцов. Найти ортонормированный базис подпространства ***L***(***a***, ***b***, ***c***) и записать параметрические уравнения подпространства в векторной и координатной формах.

Вар.	Re a_1	Im a_1	Re a_2	Im a_2	Re a_3	Im a_3	Re a_4	Im a_4	Re b_1	Im b_1	Re b_2	Im b_2	Re b_3	Im b_3	Re b_4	Im b_4	Re c_1	Im c_1	Re c_2	Imc_2	Re c_3	Im c_3	Re c_4	Im c_4
1	-1	6	0	0	-4	8	-1	5	0	-3	-1	-8	-4	4	-8	-7	-2	-3	4	0	0	1	-4	6

3. Найти:
1. расстояние от вектора ***x*** пятимерного пространства до подпространства ***L***(***a***, ***b***, ***c***);
2. ортогональную проекцию вектора ***x*** на подпространство ***L***(***a***, ***b***, ***c***);
3 ортогональную составляющую вектора ***x***.

Вар.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1	-1	-4	8	7	5

Вар.	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5
1	3	-7	-3	-1	-1	-1	1	-3	4	1	4	1	-5	7	-3

РГЗ № 7.

Вариант №1

1. Является ли заданное отображение линейным оператором в V_3:
А: $(x_1, x_2, x_3) \rightarrow (x_1\text{-}x_2, x_2+3x_3\text{-}x_1, x_3+5x_2)$ в базисе из единичных векторов.
Найти: 1) ядро оператора;
2) множество образов оператора;
3) матрицу оператора.

2. Задан линейный оператор своей матрицейA= $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.
Найти: 1) собственные значения оператора;
2) собственные векторы оператора;
3) матрицу заданного линейного оператора в базисе из собственных векторов.

3. Задана билинейная форма A($\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$). Данные приведены. Необходимо выполнить следующие задания:
.Записать матрицу билинейной формы;
.Записать билинейную форму;
.Определить ранг билинейной формы, вырождена ли заданная форма;
.Определить, является ли билинейная форма симметричной или кососимметричной, используя определение.

Вар.	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{31}	a_{32}	a_{33}
1	-1	4	2	-1	1	-3	-5	0	-5

4. Задана квадратичная форма A($\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}$).
Найти:
1. Матрицу квадратичной формы;
2. Полярную билинейную форму;
3. Определить ранг квадратичной формы, вырождена ли заданная форма;
4. Классифицировать квадратичную форму, используя критерий Сильвестра;
5. Привести к каноническому виду методами Якоби, Лагранжа и ортогональным преобразованием. В каждом случае записать формулы и матрицы преобразования.
6. Сделать проверку с помощью пакета символьных вычислений MAPLE, используя матрицу преобразования полученную при приведении к каноническому виду.
7. Индекс квадратичной формы, положительный и отрицательный индексы, сигнатуру и классифицировать форму, используя полученные результаты. Сравнить с результатами п.4;
8. Заменить коэффициент a_{ij}на λ и определить при каких значениях λ заданная квадратичная форма будет знакоопределённой.

8. Перечень вопросов на зачет (дифференцированный зачет, экзамен)

1 семестр

1. Комплексные числа в алгебраической форме и операции над ними. Возведение в степень и извлечение корня квадратного из комплексных чисел в алгебраической форме.
2. Комплексные числа в тригонометрической форме и операции над ними. Неупорядоченность множества комплексных чисел. Формула Муавра. Извлечение корня степени n из комплексного числа в тригонометрической форме.
3. Матрицы. Операции над матрицами.
4. Перестановки и подстановки. Чётность перестановок, подстановок. Композиция подстановок.
5. Определители квадратных матриц и их свойства.
6. Миноры. Теорема Лапласа. Обратная матрица.
7. Системы линейных уравнений. Правило Крамера. Матричный метод решения систем линейных уравнений.
8. Ранг матрицы. Базисный минор. Свойства.
9. Теорема Кронекера-Капелли. Количество решений у совместной системы линейных уравнений. Общее решение системы линейных уравнений.
10. Общее решение системы линейных уравнений. Метод последовательного исключения неизвестных. Обращение матриц.
11. Векторы и линейные операции с ними.
12. Линейная зависимость системы векторов: определения, свойства, теоремы.
13. Базис. Координаты вектора в заданном базисе. Свойства. Формулы преобразования. Проекции.
14. Скалярное произведение: определение, свойства.
15. Упорядоченная система векторов, ориентация векторов. Векторное произведение: определение, свойства.
16. Смешанное произведение: определение, свойства.
17. Ортогональные матрицы. Преобразование ортонормированных базисов. Углы Эйлера. Частный случай преобразования базисов.
18. Декартовы системы координат и их преобразование. Основные задачи.
19. Полярная, сферическая, цилиндрическая системы координат и их связь с декартовой системой координат.
20. Метод координат на плоскости и в пространстве. Уравнения линий и поверхностей. Суть метода координат, алгебраическая линия. Теорема о порядке алгебраической линии.
21. Прямая на плоскости: способы задания, специальные уравнения, основные леммы. Взаимное расположение прямых. Расположение прямой относительно системы координат.
22. Линии II порядка: эллипс и его свойства.
23. Линии II порядка: гипербола и её свойства.
24. Линии II порядка: парабола и её свойства.
25. Эллипс, гипербола и парабола как сечения. Полярные уравнения эллипса, гиперболы и параболы.
26. Касательные к линиям II порядка. Оптические свойства линий II порядка.
27. Основные инварианты линий II порядка.
28. Асимптотические направления линий II порядка.
29. Центры линий II порядка.
30. Приведение уравнения линии II порядка к каноническому виду. Классификация линий II порядка.

31. Плоскость в пространстве: способы задания, специальные уравнения, основные леммы.
32. Взаимное расположение плоскостей.
33. Прямая линия в пространстве: способы задания, специальные уравнения, основные леммы.
34. Взаимное расположение прямых, прямой и плоскости.
35. Метрические задачи на прямую и плоскость в пространстве.
36. Аффинные преобразования пространства их свойства, аналитическое задание. Ортогональные преобразования, их виды. Преобразования подобия (векторные), их виды и свойства. Точечные преобразования подобия, движения. Их классификация. Аналитическое задание.
37. Поверхности II порядка: поверхности вращения, примеры.
38. Поверхности II порядка: конические поверхности, примеры.
39. Поверхности II порядка: цилиндрические поверхности, примеры.
40. Поверхности II порядка: эллипсоид и его свойства.
41. Поверхности II порядка: однополостный гиперболоид и его свойства.
42. Поверхности II порядка: двуполостный гиперболоид и его свойства.
43. Поверхности II порядка: эллиптический параболоид и его свойства.
44. Поверхности II порядка: гиперболический параболоид и его свойства.
45. Алгебраические операции и алгебраические структуры. Основные определения. Гомоморфизм алгебр. Группы. Изоморфизм групп. Свойства групп и подгрупп. Группа преобразований. Теорема Кели.
46. Смежные классы. Нормальный делитель. Фактор-группы. Теорема о гомоморфизмах.
47. Кольцо. Изоморфизм колец. Главные идеалы колец. Гомоморфизм колец. Сравнимость по модулю. Классы вычетов. Поля.
48. Линейные пространства. Линейные оболочки. Линейная зависимость. Базис. Размерность пространства. Свойства векторов в координатах. Сумма и пересечение пространств.
49. Прямая сумма пространств. Изоморфизм линейных пространств. Арифметическое пространство. Базисы и их преобразование.
50. Прямые и плоскости в многомерном пространстве: задание прямых, к-мерных плоскостей, гиперплоскостей.
51. Прямые и плоскости в многомерном пространстве: взаимное расположение прямых, к-мерных плоскостей, гиперплоскостей.
52. Евклидовы (вещественные) пространства: основные определения, свойства. Метод ортогонализации. Ортогональное дополнение подпространства.
53. Евклидовы (вещественные) пространства: матрица Грамма, преобразование базисов. Изоморфизм евклидовых пространств.
54. Унитарное пространство: основные определения, свойства. Метод ортогонализации.
55. Метрическая геометрия евклидовых и унитарных пространств. Метрические задачи евклидовых и унитарных пространств.
56. Линейные операторы и сопряжённое пространство. Линейные операции с операторами.
57. Матричное представление линейного оператора. Преобразование матрицы линейного оператора.
58. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора. Приведение матрицы линейного оператора к диагональному виду.

59. Сопряжённый оператор. Самосопряжённый оператор и их свойства. Определение нормы оператора и свойства.
60. Унитарный и ортогональный операторы и их свойства.
61. Билинейные формы. Преобразование матрицы билинейной формы. Билинейные формы в конечномерных пространствах. Симметрические и кососимметрические билинейные формы
62. Квадратичная форма. Классификация квадратичных форм.
63. Метод Лагранжа. Приведение квадратичной формы к каноническому виду методом Лагранжа. Пример.
64. Метод Якоби. Приведение квадратичной формы к каноническому виду методом Якоби. Пример.
65. Закон инерции квадратичных форм. Индексы квадратичной формы. Критерий Сильвестра.
66. Квадратичные формы в Евклидовом пространстве. Приведение квадратичной формы к каноническому виду ортогональным преобразованием. Пример.
67. Гиперповерхности второго порядка и их инварианты.
68. Гиперповерхности второго порядка. Классификация гиперповерхностей второго порядка: центральных и нецентральных. Классификация поверхностей второго порядка в трехмерном пространстве.
69. Операторные уравнения, обобщенные решения, минимизирующие норму ошибки.
70. Кольца многочленов. Основные операции. Теорема о делении с остатком.
71. НОК и НОД в кольцах многочленов. Корни многочленов. Схема Горнера. Формальное дифференцирование.
72. Неприводимые многочлены и их свойства. Формулы Виета.
73. Симметрические многочлены и их свойства.

    Алгебраическая замкнутость поля комплексных чисел. Разложимость многочленов над полями комплексных и действительных чисел.

2 семестр

1. Суммирование. Индексная запись.
2. Тензор. Ковариантность, контравариантность.
3. Симметричные и кососимметричные тензоры.
4. Символы Кронекера. Символы Кристоффеля, Леви-Чивита.
5. Преобразования базисов. Взаимные базисы.
6. Операции над тензорами.
7. Псевдотензоры. Операции.
8. Диады. Полилинейные формы.
9. Тензор деформации.
10. Тензор напряжения.
11. Дифференцирование тензоров.

9. Учебно-методическое и информационное обеспечение

9.1. Основная учебная литература:

1. Смирнова, В. Б. Сокращенный курс математики для бакалавров. В 3 частях. Ч. 1. Алгебра и геометрия : учебное пособие / В. Б. Смирнова, Л. Е. Морозова, Н. В. Утина. — Санкт-Петербург : Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет, ЭБС АСВ, 2019. — 88 с. — ISBN 978-5-9227-0910-1, 978-5-9227-0916-3. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL:

http://www.iprbookshop.ru/89690.html (дата обращения: 04.11.2020). — Режим доступа: для авторизир. пользователей
2. Сикорская, Г. А. Алгебра и теория чисел : учебное пособие / Г. А. Сикорская. — Оренбург : Оренбургский государственный университет, ЭБС АСВ, 2017. — 304 с. — ISBN 978-5-7410-1943-6. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: http://www.iprbookshop.ru/78763.html (дата обращения: 05.11.2020). — Режим доступа: для авторизир. пользователей
3. Емельянова, Т. В. Линейная алгебра. Решение типовых задач : учебное пособие / Т. В. Емельянова, А. М. Кольчатов. — Саратов : Ай Пи Эр Медиа, 2018. — 184 с. — ISBN 978-5-4486-0331-0. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: http://www.iprbookshop.ru/74559.html (дата обращения: 06.11.2020). — Режим доступа: для авторизир. пользователей
4. Чеголин, А. П. Линейная алгебра и аналитическая геометрия : учебное пособие / А. П. Чеголин. — Ростов-на-Дону : Издательство Южного федерального университета, 2015. — 149 с. — ISBN 978-5-9275-1728-2. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: http://www.iprbookshop.ru/68568.html (дата обращения: 06.11.2020). — Режим доступа: для авторизир. пользователей
5. Ахметгалиева, В. Р. Математика. Линейная алгебра : учебное пособие / В. Р. Ахметгалиева, Л. Р. Галяутдинова, М. И. Галяутдинов. — Москва : Российский государственный университет правосудия, 2017. — 60 с. — ISBN 978-5-93916-552-5. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: http://www.iprbookshop.ru/65863.html (дата обращения: 07.11.2020). — Режим доступа: для авторизир. пользователей
6. Елькин, А. Г. Линейная алгебра и аналитическая геометрия : учебное пособие / А. Г. Елькин. — Саратов : Вузовское образование, 2018. — 95 с. — ISBN 978-5-4487-0325-6. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: http://www.iprbookshop.ru/77939.html (дата обращения: 07.11.2020). — Режим доступа: для авторизир. пользователей
7. Новак, Е. В. Высшая математика. Алгебра : учебное пособие / Е. В. Новак, Т. В. Рязанова, И. В. Новак ; под редакцией Т. В. Рязанова. — Екатеринбург : Уральский федеральный университет, ЭБС АСВ, 2015. — 116 с. — ISBN 978-5-7996-1537-6. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: http://www.iprbookshop.ru/69589.html (дата обращения: 05.11.2020). — Режим доступа: для авторизир. пользователей

9.2. Дополнительная учебная литература:

1. Радченко, В. П. Алгебра и геометрия : сборник задач с решениями / В. П. Радченко, О. С. Афанасьева, Е. В. Небогина. — Самара : Самарский государственный технический университет, ЭБС АСВ, 2018. — 104 с. — ISBN 2227-8397. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: http://www.iprbookshop.ru/90449.html (дата обращения: 30.10.2020). — Режим доступа: для авторизир. пользователей
2. Поддубная, М. Л. Линейная алгебра. Часть 1 : учебно-методическое пособие / М. Л. Поддубная, Е. Г. Свердлова. — Саратов : Вузовское образование, 2016. — 44 с. — ISBN 2227-8397. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: http://www.iprbookshop.ru/58325.html (дата обращения: 21.10.2020). — Режим доступа: для авторизир. пользователей
3. Фролов, С. В. Линейная алгебра в геометрическом изложении : учебно-методическое пособие / С. В. Фролов. — Санкт-Петербург : Университет ИТМО, 2015. — 75 с. — ISBN

2227-8397. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: http://www.iprbookshop.ru/71490.html (дата обращения: 27.10.2020). — Режим доступа: для авторизир. пользователей
4. Лыткина, Д. В. Алгебраические структуры : учебное пособие / Д. В. Лыткина, Т. В. Храмова. — Новосибирск : Сибирский государственный университет телекоммуникаций и информатики, 2016. — 108 c. — ISBN 2227-8397. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: http://www.iprbookshop.ru/69535.html (дата обращения: 13.10.2020). — Режим доступа: для авторизир. пользователей
5. Михалев, А. А. Алгебра матриц и линейные пространства / А. А. Михалев, А. В. Михалев. — Москва : Интернет-Университет Информационных Технологий (ИНТУИТ), 2016. — 145 c. — ISBN 5-9556-0038-8. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: http://www.iprbookshop.ru/52180.html (дата обращения: 05.12.2019). — Режим доступа: для авторизир. пользователей
6. Шерстов, С. В. Аналитическая геометрия и линейная алгебра. Матрицы и системы уравнений : учебно-методическое пособие / С. В. Шерстов. — Москва : Издательский Дом МИСиС, 2015. — 17 c. — ISBN 978-5-87623-970-9. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: http://www.iprbookshop.ru/64171.html (дата обращения: 03.11.2020). — Режим доступа: для авторизир. пользователей
7. Борсяков, А. С. Алгебра (Для студентов-иностранцев). Часть 1 : учебное пособие / А. С. Борсяков, В. А. Лопушанский, С. В. Макеев. — Воронеж : Воронежский государственный университет инженерных технологий, 2018. — 112 c. — ISBN 978-5-00032-329-8. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: http://www.iprbookshop.ru/76426.html (дата обращения: 07.10.2020). — Режим доступа: для авторизир. Пользователей

9.3. Ресурсы информационно-телекоммуникационной сети Интернет: сайт университета www.kamgu.ru, irbis.kamgpu.ru
9.4. Информационные технологии: видеолекции на канале Постнаука youtube.com

10. Формы и критерии оценивания учебной деятельности студента

Распределение баллов, составляющих основу оценки работы студента по изучению дисциплины «Тензорный анализ» в первом семестре:
- посещение занятий — 102 балла (по 3 балла за практическое занятие);
-текущий контроль — 99 баллов (по 3 баллу за выполнение домашнего задания с экспресс-опросом по его материалу);
-выполнение семестрового плана самостоятельной работы — 70 баллов (10 баллов за 1 выполненную и защищенную расчетно-графическую работу)
- экзамен — 30 баллов
Итого: - 301 балл
Шкала итоговых оценок успеваемости по дисциплине, завершающейся экзаменом:

Название	Сумма баллов	Числовой эквивалент
отлично	256-301	5
хорошо	201-255	4
удовлетворительно	151-200	3
неудовлетворительно	0 - 150	2

Распределение баллов, составляющих основу оценки работы студента по изучению дисциплины «Тензорный анализ» во втором семестре:
- посещение занятий — 42 балла (по 3 балла за практическое занятие);
-текущий контроль — 39 баллов (по 3 баллу за выполнение домашнего задания с экспресс-опросом по его материалу);
- экзамен — 19 баллов
Итого: - 100 баллов
Шкала итоговых оценок успеваемости по дисциплине, завершающейся экзаменом:

Название	Сумма баллов	Числовой эквивалент
отлично	84-100	5
хорошо	66-83	4
удовлетворительно	51-65	3
неудовлетворительно	0 - 50	2

11. Материально-техническая база
Используемые инструментальные и программные средства.
Программное обеспечение: электронная библиотека, локальная сеть КамГУ им. Витуса Беринга, учебные программы в электронном виде, электронные учебники, учебная обязательная и дополнительная литература.
электронная библиотекаibooks.ru